



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA DE LEGANÉS

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

DEPARTAMENTO DE TÉRMICA Y FLUIDOS

TRABAJO FIN DE GRADO

**MODELO UNIDIMENSIONAL PARA CHORROS DE LIQUIDO
VISCOSO: VALIDEZ, ESTABILIDAD LINEAL Y CHORROS
CAPILARES CONFINADOS**

Autor: Alberto Gómez Carrascosa

Supervisado por: Alejandro Martínez Calvo

19 de junio de 2018

Agradecimientos

A mi tutor Alejandro Martínez Calvo, sin el que este trabajo ni siquiera habría podido empezar. Gracias por todas las lecciones y ayudas que me han hecho mejorar como ingeniero.

A mis padres, mi hermano, mi abuela, a Maribel y demás familia. Por tener fe y animarme día tras día.

A mi pareja, Sandra. Por confiar siempre en mí y ayudarme en los buenos y en los malos momentos.

A mis amigos por apoyarme y animarme siempre.

Resumen

En el presente trabajo se estudiarán los chorros capilares. En primer lugar se repasarán los descubrimientos históricos haciendo especial nombramiento a Plateau y Rayleigh. A partir de los trabajos de Rayleigh se realizarán los estudios de estabilidad lineal para chorros viscosos con geometría cilíndrica sin tener en cuenta los efectos de la gravedad a través de las ecuaciones completas de Navier-Stokes y las condiciones de contorno que cierran el problema. Tras realizar este análisis se motivará la necesidad de un modelo unidimensional debido a la complejidad de las ecuaciones completas. Por este motivo, se desarrollará el análisis de estabilidad lineal habiendo expandido la variable radial en dirección radial para que las variables dependan únicamente de la dirección axial y del tiempo, esta expansión se puede realizar porque se estudia un chorro esbelto, lo cual significa que la evolución en dirección radial va a ser mucho más pequeña que la axial. Una vez obtenidas las relaciones de dispersión de ambos modelos se representarán para distintos valores del número de Laplace adimensional para compararlos. Se observará que ambos modelos son compatibles y que el modelo 1D recoge la física del problema y la curvatura completa. No solo se demostrará que son compatibles sino también que se acercan más cuanto mayor es la viscosidad del fluido llegando a solaparse ambos modelos para Números de Laplace en torno a 0.01, que se corresponde con el límite de Stokes o de viscosidad dominante. También se estudiará la tasa de crecimiento óptima que produce un aumento más acelerado de las oscilaciones provocadas por las perturbaciones facilitando la ruptura del chorro en gotas y que coincidirá con el valor aportado por Rayleigh. También se deducirán el rango de longitud de onda para los cuales el problema se vuelve inestable que coincidirá con el valor aportado por Plateau. Por último se aplicará el modelo 1D para la obtención de flujos base para chorros viscosos confinados sometidos a la acción de la gravedad. Se explicará que existen tres regímenes que dependen del caudal que serán: chorro estacionario, chorro con oscilaciones y goteo. Se cerrará el trabajo con las conclusiones globales y con los estudios actuales y proyectos futuros derivados de la aplicación de estos modelos.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Agradecimientos | 2 |
| Resumen | 4 |
| Lista de figuras | 6 |
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Estado del arte | 1 |
| 1.2. Motivación y aplicaciones | 4 |
| 1.3. Estructura del trabajo | 6 |
| 2. Análisis de estabilidad temporal de una columna líquida en ausencia de gravedad | 7 |
| 2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes para con flujo de superficie libre | 8 |
| 2.1.1. Ecuación de continuidad | 8 |
| 2.1.2. Ecuación de cantidad de movimiento | 8 |
| 2.1.3. Tensión superficial | 10 |
| 2.1.4. Equilibrio en la superficie | 10 |
| 2.1.5. Condición cinemática | 11 |
| 2.1.6. Resumen de ecuaciones | 11 |
| 2.2. Análisis de estabilidad lineal de una columna líquida en ausencia de gravedad . . | 12 |
| 2.2.1. Método numérico para la resolución de la relación de dispersión: Algoritmo de Newton-Raphson | 18 |
| 2.3. Modelo unidimensional (1D) | 19 |
| 2.4. Validez del modelo 1D | 20 |
| 2.5. Tasa de crecimiento óptima | 25 |
| 3. Aplicación del modelo 1D: chorros de líquido viscoso estirados por gravedad confinados en la dirección axial. | 28 |
| 3.1. Flujo base | 30 |
| 4. Conclusiones y trabajo futuro | 34 |
| Anexo | 35 |
| Bibliografía | 40 |

Índice de figuras

| | | |
|------|---|----|
| 1.1. | La imagen representa la superposición de los resultados de los experimentos de Gonzalez García, correspondientes con los puntos marcados sobre la curva, en comparación con el modelo de Rayleigh representado por la línea continua. Imagen obtenida de [7]. | 3 |
| 1.2. | Formación de oscilaciones y gotas en un chorro de silicona estirado por la acción de la gravedad [15] | 4 |
| 1.3. | Las figuras a-i representan distintos procesos industriales de obtención de gotas y la imagen j representa una captura real de la caída de una gota a través de una boquilla. Obtenido de [2] | 5 |
| 2.1. | Esquema de la configuración de un flujo cilíndrico uniforme representado con líneas discontinuas y perturbaciones oscilatorias representadas por línea continua. En conjunto la figura respresenta un chorro de radio a con una perturbación de amplitud $\varepsilon\eta$ y longitud de onda λ . Figura obtenida de [12] | 8 |
| 2.2. | Perspectiva de la superficie interfacial de un fluido. Se puede apreciar la dirección normal y la tangencial sobre las que se realizan los equilibrios de esfuerzos. Imagen obtenida de [8] | 11 |
| 2.3. | La figura representa tres curvas adimensionales escaladas con el tiempo viscocapilar para Laplace igual a 100, que se corresponde con el límite de Euler o de inercia dominante. La figura a muestra la curva del modelo obtenido a través de las ecuaciones completas. La figura b se ha obtenido a partir del modelo 1D. Por último, la figura c representa la superposición de ambos modelos para facilitar la comparación. | 22 |
| 2.4. | La figura representa tres curvas adimensionales escaladas con el tiempo viscocapilar para Laplace igual a 1, o régimen intermedio. La figura a muestra la curva del modelo obtenido a través de las ecuaciones completas. La figura b se ha obtenido a partir del modelo 1D. Por último, la figura c representa la superposición de ambos modelos para facilitar la comparación. | 23 |
| 2.5. | La figura representa tres curvas adimensionales escaladas con el tiempo viscocapilar para Laplace igual a 0.01, que se corresponde con el límite de Stokes o de viscosidad dominante. La figura a muestra la curva del modelo obtenido a través de las ecuaciones completas. La figura b se ha obtenido a partir del modelo 1D. Por último, la figura c representa la superposición de ambos modelos para facilitar la comparación. | 24 |
| 2.6. | La figura muestra la curva de las distintas tasas de crecimiento óptimas (las ω máximas de cada curva de amplificación) obtenidas para cada valor de Laplace de 0 a 100. Dicha curva se ha obtenido con un escalado para la tasa de crecimiento realizado con el tiempo viscocapilar, lo cual hace que tienda a cero para valores altos del número de Laplace | 25 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.7. | Figura similar a 2.6 con una adimensionalización escalando con el tiempo capilar debido a que la viscosidad pierde importancia a números altos de Laplace. Se observa que el límite tiende a 0.3433. | 26 |
| 2.8. | Se muestra la representación de los distintos números de onda correspondientes a las tasas de crecimiento máximas para cada número de Laplace. Se ha representado para Laplace de 0 a 4000 y se observa que la curva tiende a 0.7 . . . | 27 |
| 3.1. | Se muestra la ruptura de un chorro inyectado con un caudal inferior al caudal crítico en el que se aprecian las oscilaciones y el goteo. Nótese que estos chorros no están sometidos a confinamiento axial. Imagen obtenida de [16] | 28 |
| 3.2. | La figura (a) representa un esquema teórico de un chorro estacionario con viscosidad cinemática ν , densidad ρ , tensión superficial γ inyectado a una altura L a través de una boquilla de radio R , a presión atmosférica con un caudal constante y sometido a la acción de la gravedad. La figura (b) es una imagen experimental donde se puede observar el estrechamiento del chorro. Ambas han sido obtenidas de [11] | 29 |
| 3.3. | Flujos base para $L/R=20$, $Bo=1$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla | 32 |
| 3.4. | Flujos base para una $L/R=10$, $Bo=1$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla | 32 |
| 3.5. | Flujos base para $L/R=20$, $Bo=10$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla | 33 |
| 3.6. | Flujos base para $L/R=10$, $Bo=10$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla | 33 |

Capítulo 1

Introducción

Los chorros se encuentran en una gran variedad de situaciones, abarcando una amplia gama de escalas de longitud físicas. Los chorros pueden existir en escalas grandes o a nivel molecular por lo que históricamente han atraído la atención de numerosos científicos ya que constituyen un fenómeno de constante aparición en la naturaleza y están involucrados en gran variedad de aplicaciones de interés tecnológico. Por una parte, estos estudios están motivados por cuestiones prácticas y aplicaciones. Entre ellos pueden estar comprender y explicar la estructura a gran escala del universo, la mejora y optimización de la propulsión de chorro líquido, la tecnología de motores diésel, la fabricación aditiva, alcantarillado y riego agrícola, la tecnología de polvos, la tecnología de impresión por chorro de tinta, el diagnóstico médico, el uso de muestras de ADN y la fisión nuclear. Los chorros están también presentes en el uso cotidiano en las casas, duchas, aerosoles, cosméticos y en el ámbito del ocio.

Por otro lado, en la dinámica de chorros se encuentran involucrados una amplia gama de fenómenos físicos tales como la tensión superficial, la viscosidad de líquidos, reología y densidad. Los chorros también son sensibles en pequeña escala a oscilaciones térmicas. Por contra, a gran escala son sensibles a interacciones gravitacionales.

Para todas estas aplicaciones, algunas de las preguntas más frecuentes son si se romperá el chorro y en caso de que lo haga, cuánto tiempo tardará. También se estudia cómo se dispersará el chorro tras la ruptura y cuál será el tamaño de las gotas resultantes.

Experimentalmente se ha podido mejorar notablemente la resolución a la hora de obtener resultados con diversas técnicas de laboratorio y sobre todo con la cinematografía digital de alta velocidad, proporcionando información extra para la comparación con los modelos teóricos.

En el ámbito analítico, la herramienta más utilizada históricamente es el análisis de estabilidad lineal, si embargo, en el proceso de ruptura tienen lugar efectos no lineales que no se pueden predecir con la teoría lineal. La resolución de dichos efectos no lineales constituye una dificultad numérica considerable ya que para resolver se necesita integrar las ecuaciones de Navier-Stokes completas para un flujo interfacial, lo cual ha sido muy costoso históricamente. Los primeros trabajos temporales no lineales se recogen en [1] y [10]. Debido a la alta complejidad de estos métodos se ha visto necesaria la motivación de un modelo 1D que recoja la física del problema, el cual ha sido desarrollado en 1994 por Eggers & Dupont en [5] y por García y Castellanos en [6].

1.1. Estado del arte

Las primeras observaciones sobre el comportamiento de los chorros y su ruptura fueron realizado por Leonardo da Vinci en el Códice Leicester. Da Vinci se percató correctamente que la formación de una gota viene producida por unas fuerzas de cohesión que vencen a la gravedad, lo que posteriormente se definirá como tensión superficial. Lo que no supuso bien fue

que el mismo principio gobierna también el proceso de separación de la gota, el cual se produce cuando el cuello del chorro se estrecha tanto que acaba por romperse.

El mismo argumento fue elaborado más tarde por Mariotte, quien asume que la gravedad es el fenómeno responsable de la ruptura, ya que un chorro que se proyecta hacia arriba no se rompe, lo cual se demostró posteriormente que no era un argumento válido. Así estos dos autores estudian la ruptura de líquidos y sólidos como fenómenos relacionados. Mariotte también explica que la velocidad de un chorro acelera según este avanza en caída libre siguiendo esta expresión

$$v = \sqrt{2gx}$$

Siendo x la distancia a la boquilla. De este modo, si Q es el caudal, la conservación de la masa da

$$h = \sqrt{\left[\frac{Q}{\pi \sqrt{2gx}} \right]}$$

Siendo h el radio del chorro, que se hace cada vez más delgado a medida que se aleja de la boquilla. Las ideas de ambos autores sugieren que las fuerzas cohesivas actúan como una fuerza de tensión que ha de ser superada por la gravedad para que se rompa el chorro.

La solución al problema fue formulada en torno a 100 años después por Laplace en 1804-1805 en el que se expone el papel de la curvatura y sus contribuciones axial y radial. El argumento que desacredita los estudios anteriores consiste en que la tensión superficial que actúa en un chorro que alcanza la forma cilíndrica de la curvatura radial favorece la ruptura. Es decir, el sistema tiende a reducir su área superficial y por tanto a reducir el radio del chorro hasta que este llega a cero produciéndose la ruptura del mismo. De este modo, la tensión superficial favorece a la ruptura del chorro.

A principios del siglo XIX, combinando los efectos de la tensión superficial con las leyes de conservación de fluidos (Navier- Stokes) se podía dar una descripción matemática de la ruptura del chorro. Fue Savart quien pudo realizar los primeros progresos experimentales, quien indicó que la ruptura ocurre espontáneamente independientemente de cualquier fuerza externa o dirección en la que se proyecte el chorro, por lo que el motivo de la ruptura del chorro debe ser una característica intrínseca de este. Para confirmar que el chorro se había roto, hizo pasar un objeto muy delgado a través del chorro comprobando que este no estaba mojado. Savart desarrolló una técnica por la cual se podía recoger la separación del chorro en gotas que consistía en una cinta en movimiento con franjas blancas y negras alternadas que, al ponerla detrás del chorro permitió su visualización. Tras observar detenidamente el movimiento del chorro, Savart llegó a la conclusión de que antes de la ruptura hay una fase de oscilaciones que crecen hasta romper el chorro. Dichas oscilaciones aumentan al alcanzar una determinada frecuencia de resonancia para la cual Savart formuló dos leyes. La primera dice que la frecuencia es inversamente proporcional al radio de la boquilla h_0 . La segunda dice que dicha frecuencia es proporcional a la raíz del incremento de presión. Por lo tanto, Savart dedujo la existencia de una longitud de onda característica asociada con la rotura natural de la columna líquida λ_{opt} .

Efectivamente, unos años después Plateau observó que las perturbaciones se volvían inestables si su longitud de onda λ es mayor que una longitud crítica λ_{cr} , cuyo valor es

$$\frac{\lambda_{cr}}{h_0} = 2\pi$$

La observación que hizo Plateau fue que un chorro es inestable para cualquier perturbación que reduzca el área de su superficie, lo que finalmente reconoció el papel de la energía superficial o tensión superficial. Sin embargo, el valor de la longitud de onda óptimo que dedujo de las mediciones de Savart fue $\lambda_{opt} = 8,76h_0$, significativamente mayor que 2π

Posteriormente Rayleigh se dio cuenta de que para seleccionar la longitud de onda óptima había

que elegir, de todas las longitudes mayores a la crítica, la que provocara un crecimiento de las oscilaciones más rápido. Con lo que llegó a la conclusión de que la longitud de onda óptima debe ser

$$\lambda_{opt} = 9,01h_0$$

Lo cual concuerda con los experimentos realizados por Savart 50 años antes en [17]. Rayleigh llegó este resultado con el análisis clásico de estabilidad temporal en [13] para viscosidad dominante, siendo pionero en ello cuyo trabajo obtuvo el nombre de desestabilización de Plateau-Rayleigh. Más tarde realizó el mismo estudio para todas las viscosidades en [14] que más tarde recogería Chandrasekhar en [3], por lo que obtendrá el nombre de Rayleigh-Chandrasekhar. Dicho análisis se presentará más adelante. Savart en cambio lo dedujo por mecanismos energéticos sin llegar a la precisión que logró Rayleigh. Algunos de los estudios numéricos que siguieron a los de Rayleigh son los de Mansour en 1990 [10] o Ashgriz & Mashayek en 1995 [1].

Los experimentos han mejorado recientemente con el avance de la tecnología. Al aumentar la resolución de los aparatos se puede apreciar con mayor precisión el punto de ruptura del chorro. Hay estudios experimentales que validan la teoría de Rayleigh como los realizados por Donnel & Glaberson en [4] o Gonzalez García en 2009 [7], cuyos resultados experimentales se pueden observar en la figura 1.1 y coinciden a la perfección con el modelo de Rayleigh.

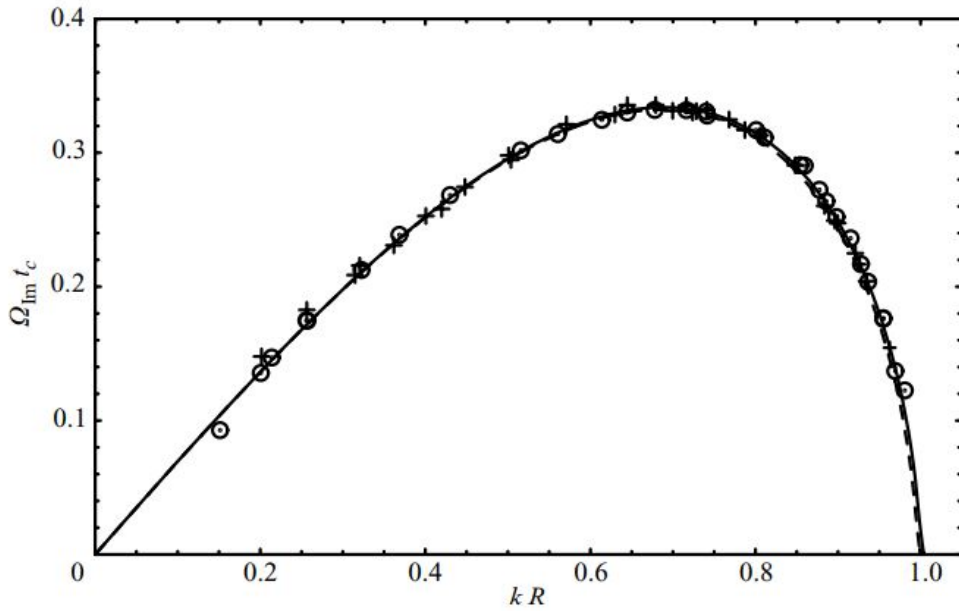


Figura 1.1: La imagen representa la superposición de los resultados de los experimentos de Gonzalez García, correspondientes con los puntos marcados sobre la curva, en comparación con el modelo de Rayleigh representado por la línea continua. Imagen obtenida de [7].

A pesar de que la teoría lineal es muy útil no puede predecir exactamente el tiempo de rotura del chorro, ya que aparecen efectos no lineales cerca de la zona de inyección que afectan considerablemente a los resultados. Se llevaron a cabo estudios experimentales no lineales que se centraban en la amplitud de las perturbaciones, el número de onda y la viscosidad e inercia en la formación de gotas satélite. Dichos estudios fueron realizados por Mansour [10] y Ashgrid [1]. La elevada complejidad de los estudios no lineales forzó a los investigadores a buscar un modelo que recogiese la física del problema pero que simplificara los cálculos. Por ello se desarrolló el modelo unidimensional (1D), que fue estudiado por Lee [9], Eggers & Dupont [5] y García y Castellanos [6] en el que también se desarrollaron modelos de orden superior como el parabólico y el parabólico promediado, que son más exactos pero no tan necesarios debido a su complejidad.

En los últimos años la configuración interesante en el ámbito tecnológico para estudiar los procesos de rotura y estabilidad ha sido la de un chorro columnar que se estrecha por gravedad, estudiado en [15] donde se realiza un análisis global de estabilidad a un chorro de longitud infinita similar al de la figura 1.2; y en [11] en el que se investiga el papel del confinamiento estudiando la estabilidad y realizando simulaciones directas con el modelo unidimensional, método que se utilizará en el apartado 3 para el cálculo de flujos base.

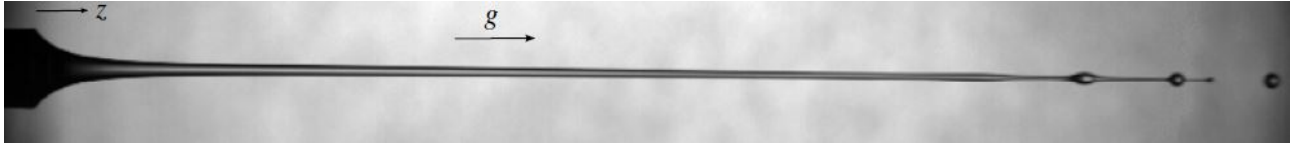


Figura 1.2: Formación de oscilaciones y gotas en un chorro de silicona estirado por la acción de la gravedad [15]

1.2. Motivación y aplicaciones

Como se comentó anteriormente, las aplicaciones para este fenómeno son muy variadas. En [2] se exponen diversas aplicaciones de interés para el campo de la medicina y para la impresión de documentos. Dentro de estas aplicaciones se encuentra el proceso de creación de fármacos o crear un microarreglo de ADN. Para esto se necesita una sucesión de gotas, que el proceso sea repetible y rápido y que el producto no contenga defectos. El proceso es el mismo que el utilizado en las impresoras de inyección, en las que se imprime mediante miles de gotas muy pequeñas utilizando este fenómeno. En la figura 1.3(j) se puede observar el proceso de goteo desde una boquilla. Estas imágenes se han obtenido utilizando una luz estroboscópica, que consiste en capturar el movimiento de las gotas mediante destellos. Este método realmente no captura la caída de una gota tras otra, sino que al aproximar la frecuencia de los destellos a la frecuencia de paso de las gotas se consigue un efecto en el que parece que la gota cae lentamente, pero en realidad es una superposición de decenas de gotas. En [2] también se advierte de los riesgos que suponen las primeras gotas, ya que se debe esperar a que la caída de estas sea periódica. Si empieza su uso sin tener en cuenta este hecho puede dejar una mancha en la impresión de un documento o estropear un experimento de secuenciación de ADN.

Las impresoras de inyección de las marcas HP, Canon, Epson y Lexmark llevan integradas cientos de estas boquillas costando menos de 100 dólares cada una. Cada boquilla puede producir desde 1000 hasta 10000 gotas similares por segundo, con una precisión asombrosa debida al tamaño de la gota, que puede variar entre 9.8 y 13.8 micrómetros. En el mercado estas tecnologías son muy rentables. Por ejemplo, el 20 % de los ingresos anuales de HP proceden de la venta de dichas impresoras.

En cuanto a los métodos para la obtención de las gotas se pueden apreciar en la figura 1.3. Las figuras a, b y c describen algunos de los métodos más sencillos. Estos tres métodos consisten en hacer fluir un líquido con caudal constante a través de un tubo cilíndrico. En el exterior normalmente habrá aire, pero se puede utilizar otro fluido. En el proceso c, cabe destacar que el fluido está sometido a un campo eléctrico. El problema de estas técnicas es que con ellas es difícil conseguir un tamaño de gota menor a un milímetro. En las figuras d, e y f se describen procesos más utilizados para la impresión por inyección.

En la figura 1.3d se utiliza el método CIJ, cuyas siglas significan Continuous Ink Jet o chorro de tinta continuo. El proceso de las CIJ consiste en un flujo continuo de pequeñas gotas de tinta que son transportadas mediante un campo eléctrico hasta la superficie del material sobre el que se desea imprimir. Este sistema es muy versátil, ya que se puede imprimir en prácticamente cualquier superficie con una velocidad de impresión muy elevada y con una calidad muy alta.

En las figuras 1.3e y 1.3f se utiliza el proceso conocido como DOD, cuyas siglas significan Drop on Demand. En este proceso las gotas son expedidas del cabezal de impresión mediante un aumento de presión generado por un campo eléctrico. La peculiaridad de este método es que las gotas solamente son expulsadas cuando se necesitan, de ahí el nombre utilizado para este método. Con esto se obtienen impresiones de alta velocidad, gran calidad, en todo tipo de superficies, con bajo coste de mantenimiento y sin tener contacto directo con el material; lo cual aumenta la seguridad para el usuario. La figura 1.3f se encuentra dentro de los procesos DOD, pero tiene la peculiaridad de calentar la tinta, lo que convierte a este proceso en un TIJ. El TIJ, cuyas siglas significan Thermal Ink Jet, hace pasar una corriente eléctrica por una resistencia que calienta la tinta formando gotas diminutas. Una vez que la gota se ha formado es expulsada hasta la superficie de impresión. Después la corriente eléctrica se corta y la resistencia vuelve a llenarse de tinta para realizar un nuevo ciclo. El proceso dura una fracción de segundo y se repite hasta que la imagen a imprimir está completa. Este método proporciona una calidad de impresión alta, con un fácil mantenimiento y una gran eficiencia, lo que reduce los costes.

En la figura 1.3g se utilizan boquillas grandes utilizando una técnica que se conoce como flow focusing, en la que un líquido brota en forma de chorro desde un tubo de radio R encontrándose con una placa con un agujero. El chorro de líquido fluye a través de este agujero. En el exterior hay otro fluido gaseoso que puede ser aire. Se hace pasar una corriente de aire por el agujero a la vez que el chorro, lo que provoca una ruptura de este en gotas. Este método permite obtener gotas de tamaños de 35 a 40 micrómetros a partir de tubos de radios de 200 micrómetros. En la figura 1.3h también se utiliza una boquilla grande, pero en este proceso se parte de un líquido en reposo que es aspirado hacia arriba provocando la formación de gotas para un caudal crítico. El último método es el que se muestra en la figura 1.3i en el que una gota de líquido cuelga de una varilla, que en formación de ADN se suele denominar alfiler. Esta herramienta se mueve colocando el ADN. Primero se mueve hacia abajo acercándose al sustrato y se crea una unión de líquido. El alfiler se mueve hacia arriba para romper esta unión depositando un volumen de líquido en forma de gota.

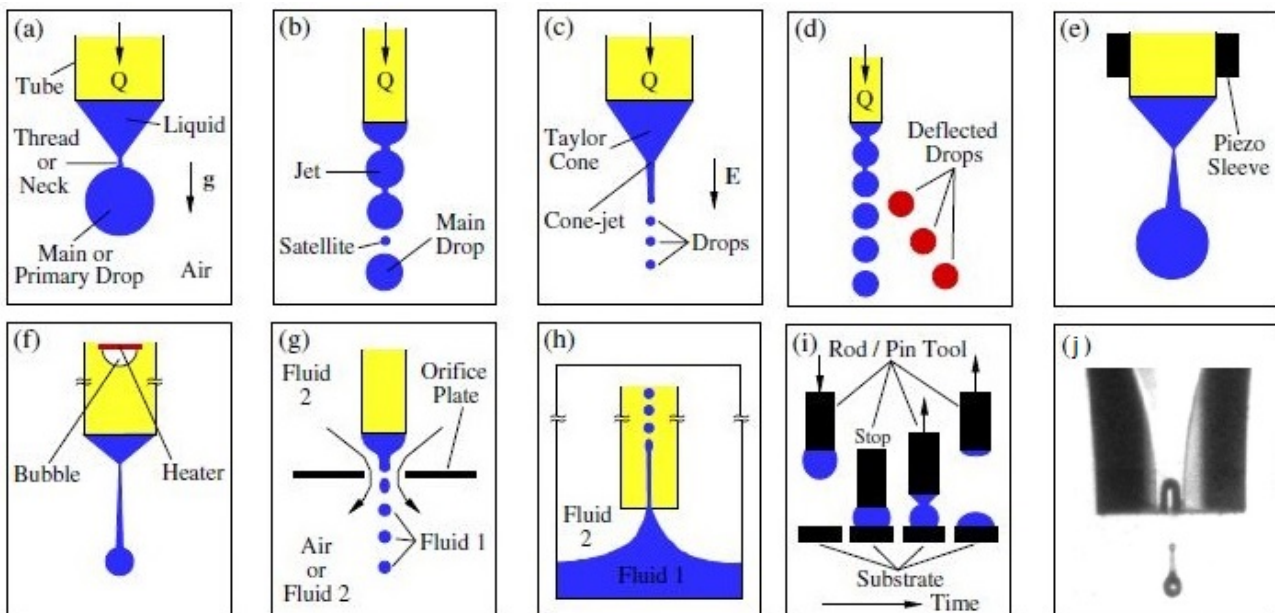


Figura 1.3: Las figuras a-i representan distintos procesos industriales de obtención de gotas y la imagen j representa una captura real de la caída de una gota a través de una boquilla. Obtenido de [2]

1.3. Estructura del trabajo

En el presente trabajo se expondrá el análisis temporal de Rayleigh aplicado a una columna de líquido con forma cilíndrica sin tener en cuenta los efectos gravitatorios mediante las ecuaciones completas de Navier-Stokes. Posteriormente, debido a la complejidad de este desarrollo se buscará simplificar el problema mediante un modelo 1D de primer orden. Para ello se expande en dirección radial debido a que el chorro es esbelto y la escala de evolución radial es mucho menor que la axial en órdenes de magnitud, lo cual garantiza la esbeltez de la columna líquida permitiendo hacer una expansión en la variable radial, haciendo que la solución solamente dependa de la coordenada axial y del tiempo. Una vez desarrollados ambos modelos se representarán sus relaciones de dispersión y se compararán para comprobar la validez del modelo 1D. A continuación se estudiarán las longitudes de onda crítica y óptima expuestas por Plateau y Rayleigh y comentadas en la introducción. Por último se aplicará el modelo 1D para la obtención de flujos base de un chorro de alta viscosidad sometido a estiramiento por gravedad.

Capítulo 2

Análisis de estabilidad temporal de una columna líquida en ausencia de gravedad

Se pretende estudiar la estabilidad de una columna líquida frente a perturbaciones infinitesimales en ausencia de gravedad. Para este estudio se supondrá que el chorro tiene geometría cilíndrica. Este estudio es válido para caudales y números de Weber altos. También hay que recalcar que dicho estudio tendrá validez en una región lejos de la boquilla de inyección que dicho análisis se realizará aguas abajo de la boquilla en una zona alejada y para caudales altos. El motivo de estudiar el régimen en una zona alejada de la boquilla es que cerca de dicha boquilla se producen efectos de relajación viscosa que no se van a abarcar en este proyecto. Se estudiarán las inestabilidades producidas en un chorro tal y como lo estudió Rayleigh en [14]. Para estudiar dichas inestabilidades se asumirá que las perturbaciones inducen oscilaciones en el chorro de carácter armónico que pueden crecer o amortiguarse en el tiempo. Para comprobar esto se descompondrán dichas perturbaciones en modos normales y se estudiará la tasa de crecimiento ω frente a su correspondiente número de onda k y se comprobará si ω obtiene valores positivos o negativos y en que rangos de k se producen. Para valores positivos de ω el chorro se volverá inestable por tener una tasa de crecimiento positiva, y para valores de ω negativos dichas perturbaciones se disiparán volviendo al flujo estable. La figura 2.1 representa un esquema de las oscilaciones producidas sobre un chorro donde se recalcan los parámetros de longitud de onda, el radio inicial, y la variación del radio tal y como lo estudió Raeligh en [12].

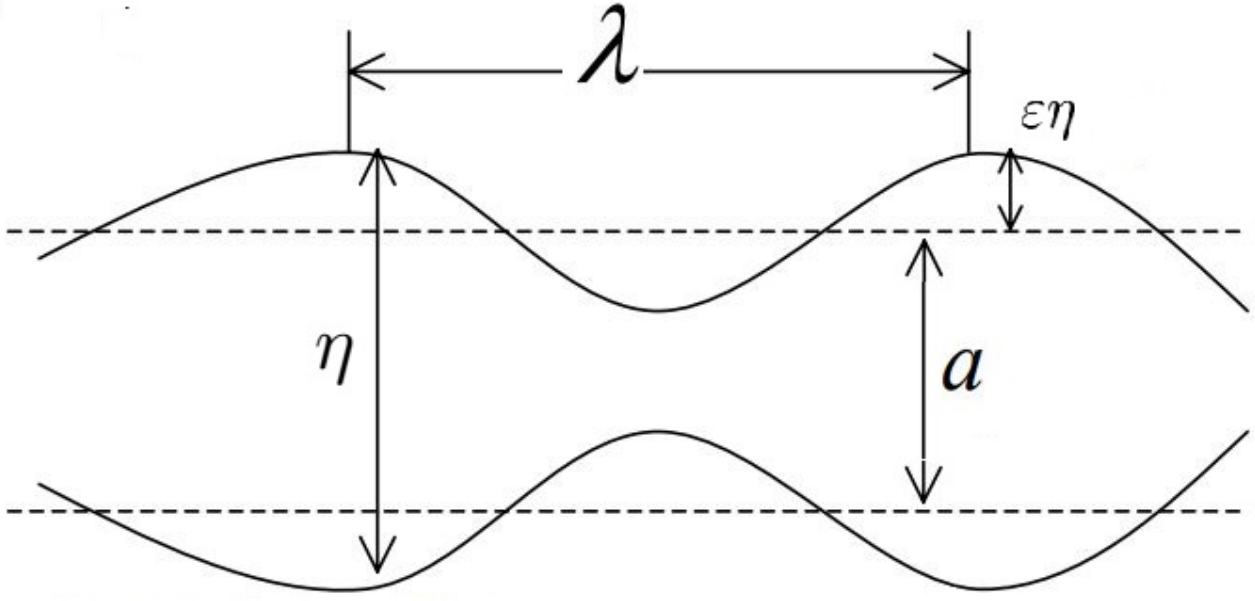


Figura 2.1: Esquema de la configuración de un flujo cilíndrico uniforme representado con líneas discontinuas y perturbaciones oscilatorias representadas por línea continua. En conjunto la figura respresenta un chorro de radio a con una perturbación de amplitud $\varepsilon\eta$ y longitud de onda λ . Figura obtenida de [12]

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes para con flujo de superficie libre

A continuación se desarrollarán las ecuaciones que se utilizarán para la resolución del problema y las condiciones de contorno necesarias para la resolución de este.

2.1.1. Ecuación de continuidad

Es el primer principio de conservación de la mecánica de fluidos. También conocido como la ley de conservación de la masa, dicta que en un volumen de control la cantidad de partículas se mantiene constante, es decir, que la masa no varía. Este principio se puede denotar mediante la siguiente expresión para un fluido cualquiera.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (2.1)$$

Como se puede observar, esta expresión tiene en cuenta la variación de densidad frente al tiempo, lo cual en este caso es nulo, ya que se estudia un fluido incompresible; por lo que la expresión resultante será:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 será finalmente una de las ecuaciones para el análisis de estabilidad.

2.1.2. Ecuación de cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento involucra las fuerzas que actúan sobre el fluido, dividiéndose en fuerzas de largo alcance (también conocidas como fuerzas de volumen o fuerzas

másicas) y fuerzas de corto alcance (también conocidas como fuerzas de superficie).

Las fuerzas de largo alcance se refieren en particular a la gravedad, mientras que las fuerzas de corto alcance se puede decir que actúan sobre la superficie del fluido.

Estas fuerzas sobre la superficie del fluido se pueden escribir en función de su orientación con la normal de la siguiente forma:

$$\bar{f}_n = \bar{\tau} \cdot \bar{n} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \cdot \bar{n} \quad (2.3)$$

Donde los esfuerzos normales τ_{11} , τ_{22} , y τ_{33} y los esfuerzos tangenciales τ_{12} , τ_{13} y τ_{23} son función de la posición y del tiempo.

El esfuerzo superficial $\bar{\tau} \cdot \bar{n}$ se puede dividir en su componente normal $(\bar{n} \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{n}) \bar{n}$ y su componente tangencial $\bar{\tau} \cdot \bar{n} - (\bar{n} \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{n}) \bar{n}$

Extendiendo (2.3) para toda la superficie y aplicando el teorema de Gauss por ser la superficie cerrada se puede obtener la resultante de la fuerza superficial

$$\int_{\Sigma} \bar{\tau} \cdot \bar{n} d\sigma = \int_V \nabla \cdot \bar{\tau} dV \quad (2.4)$$

Aplicando la ecuación anterior a un elemento diferencial de fluido se puede concluir que $\nabla \cdot \bar{\tau}$ es la resultante de las fuerzas superficiales por unidad de volumen.

Finalmente, igualando el término de inercia a las fuerzas de largo y corto alcance se obtiene:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \bar{f}_m \quad (2.5)$$

Desarrollando la derivada sustancial en (2.5) y despejando se llega a la expresión

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla v \right) = \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \bar{f}_m \quad (2.6)$$

Para cerrar el problema se necesita definir $\bar{\tau}$, el cual se va a utilizar la ley de Navier-Poisson, que es válida para un fluido Newtoniano donde $\bar{\tau}$ tiene una dependencia lineal con \bar{v} . En esta teoría se plantea la representación de este término como:

$$\bar{\tau} = -p\bar{I} + \bar{\tau}' \quad (2.7)$$

donde $\bar{\tau}'$ se puede escribir como

$$\bar{\tau}' = 2\mu\bar{T}_d + \left(\mu_v + \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \bar{v}) \bar{I} \quad (2.8)$$

Aplicando la ecuación de continuidad comentada en el apartado anterior, el resultado es

$$\bar{\tau} = -p\bar{I} + 2\mu\bar{T}_d \quad (2.9)$$

donde \bar{T}_d se trata del tensor velocidad de deformación, quedando la ecuación de cantidad de movimiento para un fluido incompresible en forma tensorial

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla v \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{v} + \bar{f}_m \quad (2.10)$$

2.1.3. Tensión superficial

La tensión superficial se define como una energía asociada a la superficie de separación entre dos medios distintos, como por ejemplo en este caso, líquido y gas. El sistema tiene a minimizar esta energía dando como resultado el área mínima, que es la forma esférica.

Se puede describir dicha tensión como una energía por unidad de área o una fuerza por unidad de longitud, siempre en dirección de la normal a la superficie.

Tal como se demuestra en [8] la presión ejercida por la tensión superficial es

$$\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.11)$$

siendo γ el coeficiente de tensión superficial y $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ la curvatura, donde R_1 y R_2 son los radios principales de curvatura.

La curvatura también se puede definir como $\nabla \cdot \bar{n}$, siendo \bar{n} el vector normal a la superficie. Definiendo una variable $f = r - \eta(z, t)$ se puede obtener para una superficie axilsimétrica como

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \\ \bar{n} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \left[-\frac{\partial \eta}{\partial z} e_z + e_r \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Donde η es una variable que describe la posición de la superficie libre del chorro, es decir, define la posición del radio a lo largo del fluido. Esta variable dependerá de la posición en la dirección axial y del tiempo.

En la ecuación 2.12 queda definido el vector normal a la superficie sobre el que va a actuar la componente de la tensión superficial. Una vez definido el vector normal se puede definir el vector tangencial como

$$\bar{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} e_r + e_z \right] \quad (2.13)$$

Por tanto la curvatura toma la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \bar{n} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\frac{\partial \eta}{\partial z}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \right] + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \right] \quad (2.14)$$

Simplificando

$$\nabla \cdot \bar{n} = \frac{1}{\eta \sqrt{1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]^2}} - \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}}{\left[1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.15)$$

2.1.4. Equilibrio en la superficie

En este apartado se va a realizar un equilibrio de esfuerzos en la superficie del chorro en la dirección normal y tangencial. Empezando por las componentes normales

$$\bar{n} \cdot \bar{\bar{\tau}} \cdot \bar{n} = -\gamma (\nabla \cdot \bar{n}) \quad (2.16)$$

Sustituyendo $\bar{\bar{\tau}}$ de la ecuación (2.9) se obtiene

$$p - \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \right] = \gamma (\nabla \cdot \bar{n}) \quad (2.17)$$

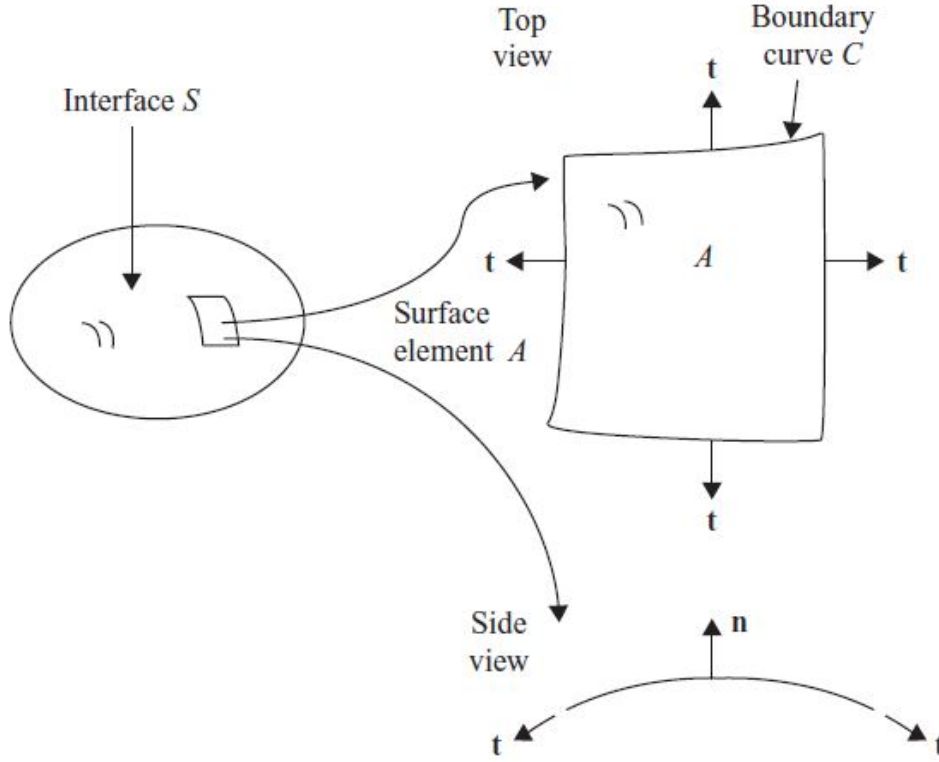


Figura 2.2: Perspectiva de la superficie interfacial de un fluido. Se puede apreciar la dirección normal y la tangencial sobre las que se realizan los equilibrios de esfuerzos. Imagen obtenida de [8]

Para la dirección tangencial se tiene

$$\bar{n} \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{t} = 0 \quad (2.18)$$

Operando (2.18)

$$\frac{\mu}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2} \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right) - 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.19)$$

2.1.5. Condición cinemática

Por último, falta definir la condición cinemática, que como se explica en [8], es la condición que hace que la interfase sea una superficie fluida, es decir, la velocidad normal del fluido y de la superficie son la misma. Para esta condición se define en [5]

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \eta}{\partial z} = v_r \quad (2.20)$$

2.1.6. Resumen de ecuaciones

Antes de comenzar el análisis de estabilidad se expone un resumen de las ecuaciones desarrolladas para su posterior resolución.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (2.21)$$

Ecuación de cantidad de movimiento

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{a^2} \right) \quad (2.22)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - g \quad (2.23)$$

Equilibrio de esfuerzos en dirección normal

$$p - \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \right] = \gamma (\nabla \cdot \vec{n}) \quad (2.24)$$

Equilibrio de esfuerzos en dirección tangencial

$$\frac{\mu}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2} \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \left(1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right) - 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.25)$$

Condición cinemática

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_z \frac{\partial \eta}{\partial z} = v_r \quad (2.26)$$

2.2. Análisis de estabilidad lineal de una columna líquida en ausencia de gravedad

En este apartado se va a realizar un análisis de estabilidad local para estudiar el comportamiento de una columna líquida cilíndrica en ausencia de gravedad.

Para dicho análisis se partirá de las ecuaciones de Navier Stokes, deducidas en el apartado anterior y que se pueden revisar en [8]. Tras plantear las ecuaciones, se procederá a una linealización de estas donde se supondrán una serie de variaciones en la velocidad, el radio del chorro y la presión de carácter infinitesimal, ya que en la práctica dichas variaciones son muy pequeñas pero inducen inestabilidades en el chorro que pueden desestabilizarlo hasta llegar a la ruptura del mismo.

Para el análisis de estabilidad local se superponen al flujo base las perturbaciones infinitesimales de velocidad εv , presión εp y radio $\varepsilon \eta$, las cuales se descompondrán en modos normales con la siguiente expresión:

$$(v_r, v_z, p, \eta) = (0, 0, p_a + \frac{\gamma}{a}, a) + \varepsilon (\hat{v}_r, \hat{v}_z, \hat{p}, \hat{\eta}) e^{wt+ikz} \quad (2.27)$$

La ecuación 2.27 es la expresión clásica de una onda donde k es el número de onda y ω tiene una parte imaginaria que corresponde a la frecuencia de oscilación y una parte real que corresponde a la tasa de crecimiento, de tal forma que al obtener una relación de dispersión $D(\omega - k)$ se tendrá un problema inestable para valores positivos de ω real y, en cambio, para valores negativos se tendrá un problema estable que se amortiguará a lo largo del tiempo. También se puede eliminar la parte imaginaria de ω suponiendo que es igual a cero ya que se ha elegido un sistema de referencia en el que el sistema de referencia se mueve con la velocidad del chorro líquido, con lo que el observador solamente percibe variaciones de amplitud pero no aprecia frecuencia angular. De esta forma, con la expresión 2.27 se obtiene una relación de dispersión para las variables k y ω . Una vez obtenida la relación, se estudiarán los casos límite del problema, los cuales comprenden inercia dominante y viscosidad dominante

Para este apartado se partirá de las ecuaciones completas de [5] suponiendo viscosidades variables y flujo axilsimétrico.

Se partirá de las ecuaciones 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 y 2.26 para describir la presión, las velocidades radial y axial, la conservación de la masa, los equilibrios en las direcciones normal y tangencial y la condición cinemática

Perturbación de presión

En primer lugar se busca una expresión que describa la evolución de la presión. Se va a partir de las ecuaciones de cantidad de movimiento y continuidad para todas las direcciones:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \nabla v = -\nabla \bar{p} + \mu \nabla^2 \bar{v} \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0 \quad (2.29)$$

A continuación se linealizan estas expresiones de tal forma que por el flujo base más una perturbación infinitesimal. De este modo se sustituyen los parámetros de la siguiente manera: $\bar{\eta} = a + \varepsilon \bar{\eta}'$ $p = p_a + \frac{\gamma}{a} + \varepsilon \bar{p}'$ $v = \varepsilon \bar{v}'$ donde el tilde indica que son perturbaciones infinitesimales.

$$\rho \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'}{\partial t} + \rho \varepsilon^2 \bar{v}' \nabla \bar{v}' = -\nabla \varepsilon \bar{p}' + \varepsilon \mu \nabla^2 \varepsilon \bar{v}' \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon \bar{v}' = 0 \quad (2.31)$$

Despreciando los términos de $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$ por ser perturbaciones infinitesimales por ser perturbaciones infinitesimales ($\varepsilon \ll 1$), se obtienen las expresiones linealizadas para cantidad de movimiento y continuidad

$$O(\varepsilon) : \quad \rho \frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} = -\nabla \bar{p}' + \mu \nabla^2 \bar{v}' \quad (2.32)$$

$$O(\varepsilon) : \quad \nabla \bar{v}' = 0 \quad (2.33)$$

Una vez obtenidas estas expresiones se pueden combinar para obtener una condición que describa la variación de la perturbación de la presión. Para este paso se realizará la divergencia en la ecuación de cantidad de movimiento linealizada 2.32 y haciendo uso de 2.33 se obtiene la expresión para la perturbación de la presión:

$$\nabla^2 \bar{p}' = 0 \quad (2.34)$$

Tal y como se explicó en la introducción de este apartado, se van a descomponer las perturbaciones infinitesimales en modos normales con la expresión 2.27

El resultado obtenido para la condición de presión $\nabla^2 p = 0$ resulta

$$\frac{d^2 \hat{p}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{p}}{dr} - k^2 \hat{p} = 0$$

Esta expresión es una ecuación diferencial de Bessel modificada cuya solución es

$$\hat{p} = AI_0(ka) + BK_0(ka)$$

Donde A y B son constantes de integración e $I_0(x)$ y $K_0(x)$ son la funciones de Bessel modificadas de orden cero de primera y segunda especie respectivamente. En esta expresión B

debe ser igual a cero porque $k_0(x)$ diverge cuando el radio tiende a 0, por lo que la expresión resultante para la amplitud de la presión es

$$\hat{p} = AI_0(ka) \quad (2.35)$$

Perturbación de velocidad radial

Ahora se va a utilizar la componente radial de la ecuación de cantidad de movimiento 2.22 para determinar el comportamiento de la velocidad en la dirección del radio.

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}_r}{r^2} \right) \quad (2.36)$$

Se linealiza

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial t} + \varepsilon \bar{v}'_r \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial r} + \varepsilon \bar{v}'_z \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \varepsilon \bar{p}'}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial r} - \frac{\varepsilon \bar{v}'_r}{r^2} \right) \quad (2.37)$$

Se suponen cero los términos de ε^2

$$\rho \frac{\partial \bar{v}'_r}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{p}'}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}'_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_r}{\partial r} - \frac{\bar{v}'_r}{r^2} \right) \quad (2.38)$$

A continuación se descompone en modos normales según la ecuación 2.27

$$\frac{\rho}{\mu} \omega \hat{v}_r = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{v}_r}{\partial r^2} - k^2 \hat{v}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} - \frac{\hat{v}_r}{r^2}$$

Se sustituye la amplitud de la presión por su ecuación de Bessel 2.35

$$\frac{kA}{\mu} I_1(ka) = \frac{\partial^2 \hat{v}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial r} - \left(\frac{\rho}{\mu} \omega + k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \hat{v}_r$$

Si se observa la ecuación a la derecha del igual, se puede ver que \hat{v}_r también cumple la forma de una ecuación diferencial de Bessel, excepto por el término $\frac{\rho}{\mu} \omega$, que hace que sea no homogénea, por lo que se deberá dividir en dos ecuaciones de Bessel, una particular y otra homogénea de la siguiente manera:

Forma homogénea:

$$\hat{v}_{rH} = BI_1(\bar{k}a)$$

Siendo \bar{k}

$$\bar{k}^2 = k^2 + \frac{\rho}{\mu} \omega$$

Forma particular, donde se añade una constante X :

$$\hat{v}_{rP} = XI_1(ka)$$

$$\frac{kA}{\mu} I_1(ka) = -\frac{\rho \omega}{\mu} XI_1(ka)$$

$$X = -\frac{kA}{\rho \omega}$$

$$\hat{v}_{rP} = -\frac{kA}{\rho \omega} I_1(ka)$$

Finalmente la ecuación para el comportamiento de la velocidad radial cumple

$$\widehat{v}_r = BI_1(\bar{k}a) - \frac{kA}{\rho\omega} I_1(ka) \quad (2.39)$$

Perturbación de velocidad axial

A continuación se realiza el mismo procedimiento para la velocidad según el eje z partiendo de la ecuación de cantidad de movimiento 2.23 para el eje z

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} \right) \quad (2.40)$$

Se linealiza la expresión

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial t} + \varepsilon \bar{v}'_r \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial r} + \varepsilon \bar{v}'_z \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \varepsilon \bar{p}'}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial r} \right) \quad (2.41)$$

Se desprecian los términos con ε^2

$$\rho \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon \bar{p}'}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \bar{v}'_z}{\partial r} \right) \quad (2.42)$$

A continuación se descompone en modos normales del mismo modo que con la velocidad radial

$$\frac{\rho}{\mu} \omega \widehat{v}_z = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 \widehat{v}_z}{\partial r^2} - k^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{v}_z}{\partial r} \right)$$

Sustituyendo \widehat{p} por su ecuación de Bessel 2.35

$$\frac{kAi}{\mu} I_0(ka) = \frac{\partial^2 \widehat{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{v}_z}{\partial r} - \left(\frac{\rho}{\mu} \omega + k^2 \right) \widehat{v}_z$$

En este caso la perturbación de la velocidad en el eje z sigue una ecuación de Bessel de orden 0 por no tener el término $\frac{1}{a^2}$. Por conservar el término $\frac{\rho}{\mu} \omega$ también se debe dividir la solución en homogénea y particular.

Forma homogénea:

$$\widehat{v}_{zH} = CI_0(\bar{k}a)$$

Siendo \bar{k}

$$\bar{k}^2 = k^2 + \frac{\rho}{\mu} \omega$$

Forma particular:

$$\widehat{v}_{zP} = \bar{X} I_0(ka)$$

$$\frac{kAi}{\mu} I_0(ka) = -\frac{\rho\omega}{\mu} \bar{X} I_0(ka)$$

$$\bar{X} = -\frac{kAi}{\rho\omega}$$

$$\widehat{v}_{zP} = -\frac{kAi}{\rho\omega} I_0(ka)$$

Finalmente la ecuación para el comportamiento de la velocidad según el eje z cumple

$$\widehat{v}_z = CI_1(\bar{k}a) - \frac{kAi}{\rho\omega}I_0(ka) \quad (2.43)$$

Reescribiendo las ecuaciones 2.21, 2.24, 2.25 y 2.26 en modos normales del mismo modo que se ha hecho con las velocidades se obtiene:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \widehat{v}_r}{\partial r} + \widehat{v}_z ki + \frac{\widehat{v}_r}{r} = 0 \quad (2.44)$$

Equilibrio en dirección normal

Para poder describir el equilibrio en la dirección normal en modos normales primero se debe linealizar la curvatura. Partiendo de la ecuación 2.15 se sustituye $\eta = (a + \varepsilon\eta)$

$$\nabla \cdot \bar{n} = \frac{1}{(a + \varepsilon\eta)\sqrt{1 + \left[\frac{\partial(a+\varepsilon\eta)}{\partial z}\right]^2}} - \frac{\partial^2(a + \varepsilon\eta)}{\partial z^2} \frac{1}{\left[1 + \left[\frac{\partial(a+\varepsilon\eta)}{\partial z}\right]^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Operando y suponiendo los términos ε^2 igual a cero se obtiene la curvatura linealizada

$$\nabla \cdot \bar{n} = \frac{1}{a} - \frac{\bar{\eta}'}{a^2} - \frac{\partial^2 \bar{\eta}'}{\partial z^2} \quad (2.45)$$

Finalmente la ecuación de equilibrio en la dirección normal en modos normales resulta

$$\widehat{p} - 2\mu \frac{\partial \widehat{v}_r}{\partial r} = -\gamma \widehat{\eta} \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) \quad (2.46)$$

Equilibrio en dirección tangencial

$$\frac{\partial \widehat{v}_z}{\partial r} + ik\widehat{v}_r = 0 \quad (2.47)$$

Condición cinemática

$$\widehat{v}_r = \omega \widehat{\eta} \quad (2.48)$$

La solución del problema consistirá en la resolución del sistema de ecuaciones formado por 2.39, 2.43, 2.44, 2.46, 2.47 y 2.48. Se obtiene un sistema matricial homogéneo para A y B con la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M \cdot \phi &= 0 \\ M &= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \\ \phi &= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donde la primera fila corresponderá a la dirección normal y la segunda fila a la dirección tangencial. El determinante de la matriz M debe ser cero para que el sistema matricial sea compatible indeterminado; si dicho sistema fuera compatible determinado la única solución sería la trivial y eso no aporta ningún resultado al problema. Dicho proceso se ha debido realizar con cálculo simbólico en Matlab debido a su alta complejidad. Se adjuntará el código en el anexo. Tras realizar este cálculo, la ecuación obtenida es la siguiente:

$$[k(k^2 - \bar{k}^2) I_1(ka) I_1(\bar{k}r) (-\gamma k^2 a^2 + 2\mu\omega a + \gamma) + a^2\omega (2\mu k^2 + \rho\omega) I_0(ka) I_1(\bar{k}r) (k^2 + \bar{k}^2) - 4k^3\bar{k}\mu a^2\omega I_1(kr) I_0(\bar{k}a)] \frac{i}{ka^2\rho\omega^2} = 0$$

Una vez obtenida esta ecuación resulta conveniente adimensionalizarla, para ello se tomarán las siguientes escalas características: a para la escala radial y el tiempo viscocapilar $\frac{\mu a}{\gamma}$ para la temporal.

$$k_{adim} = \frac{k}{a}$$

$$\bar{k}_{adim}^2 = \frac{k^2}{a^2} + \frac{\rho\gamma\omega}{\mu^2 a}$$

$$\omega_{adim} = \frac{\gamma\omega}{\mu a}$$

Por conveniencia se van a nombrar los parámetros adimensionales k_{adim} y ω_{adim} como k y ω en este apartado y también en el resto de adimensionalizaciones del documento. Introduciendo las nuevas variables resulta la siguiente expresión

$$\frac{k}{a^3} (k^2 - \bar{k}^2) I_1(k) I_1(\bar{k}) \left(-\gamma k^2 + \frac{2\mu a \gamma \omega}{\mu a} + \gamma \right) + \frac{r^2 \gamma \omega}{\mu a} \left(\frac{2\mu k^2}{a^2} + \frac{\rho \gamma \omega}{\mu a} \right) \frac{I_0(k) I_1(\bar{k})}{r^2} (k^2 + \bar{k}^2) - \frac{4k^3 \bar{k} \mu a^2 \gamma \omega I_1(k) I_0(\bar{k})}{a^4 \mu a} = 0$$

La expresión anterior se multiplica por $\frac{a^3}{\gamma}$ para obtener una expresión adimensional, que es la siguiente

$$k(k^2 - \bar{k}^2) I_1(k) I_1(\bar{k}) (2\omega + 1 - k^2) + \omega (2k^2 + La\omega) I_0(k) I_1(\bar{k}) (k^2 + \bar{k}^2) - 4k^3 \bar{k} \omega I_1(k) I_0(\bar{k}) = 0$$

Donde $\bar{k}^2 = k^2 + La\omega$

El objetivo ahora será presentar la función con un único término adimensional dependiente de las propiedades del fluido. Este término será el número de Laplace (La), que se obtiene como un balance entre el término de presión capilar y los términos viscosos y se define como $La = \frac{\rho \gamma a}{\mu^2}$.

$$La\omega^2 F(k) - k^2 (1 - k^2) + \frac{4k^4}{La} (F(k) - F(\bar{k}) + 2\omega k^2 (2F(k) - 1)) = 0 \quad (2.49)$$

Donde

$$F(x) = \frac{k I_0(x)}{I_1(x)} \quad (2.50)$$

Otro desarrollo que es de mucha utilidad es el análisis de estabilidad del modelo 3D suponiendo

que el problema está dominado por inercia, esto es, que la viscosidad es cercana a cero, por lo que se desprecian todos los términos viscosos. Para este desarrollo se utilizará la ecuación de perturbación de presión 2.35 y las condiciones en la interfase de equilibrio en la dirección normal 2.24 y condición cinemática 2.26 para viscosidad nula, que expresadas de forma linealizada resultan:

$$\varepsilon \bar{p}' = -\gamma \left(\frac{\varepsilon \bar{\eta}'}{a^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon \bar{\eta}'}{\partial z^2} \right) \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon \bar{\eta}'}{\partial t} + \varepsilon \bar{v}_z' \frac{\partial \varepsilon \bar{\eta}'}{\partial z} &= \varepsilon \bar{v}_r' \\ \frac{\partial \varepsilon \bar{\eta}'}{\partial t} &= \varepsilon \bar{v}_r' \end{aligned} \quad (2.52)$$

Expresando estas ecuaciones en modos normales con la expresión 2.27 el resultado es

$$\hat{p} = -\gamma \hat{\eta} \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) \quad (2.53)$$

$$\hat{v}_r = \omega \hat{\eta} \quad (2.54)$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones y 2.35 se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{k\gamma}{\rho a^2} (1 - k^2 a^2) \frac{I_1(ka)}{I_0(ka)}} \quad (2.55)$$

Para adimensionalizar esta expresión se va a escalar ω con el tiempo capilar y no el viscocapilar, ya que se está suponiendo inercia dominante. Por lo que los parámetros adimensionales se obtienen con estas expresiones

$$\begin{aligned} k_{adim} &= \frac{k}{a} \\ \omega_{adim} &= \omega \frac{\rho a^3}{\gamma} \end{aligned}$$

Finalmente la relación de dispersión entre ω y k para el caso con las ecuaciones completas con inercia dominante adimensionalizada resulta

$$\omega = \sqrt{(1 - k^2) k \frac{I_1(k)}{I_0(k)}} \quad (2.56)$$

2.2.1. Método numérico para la resolución de la relación de dispersión: Algoritmo de Newton-Raphson

Una vez obtenida la ecuación 2.49 se deberá representar ω frente a k para ver la curva de inestabilidad y compararla con el modelo unidimensional. Cabe destacar que este caso engloba todas las variables, por lo que es el más completo de todos pero es mucho más complicado llegar a la solución, tal y como se ha podido observar. Por este motivo se busca demostrar la validez de la aproximación al modelo unidimensional para poder simplificar el problema.

Para representar la curva de inestabilidad se debe utilizar el método de Newton-Raphson en Matlab, ya que no es posible despejar ω frente a k . Para resolver con este método se utiliza dicho método, que sigue la siguiente ley:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

De este modo se puede hacer un método iterativo en el que se le da un valor inicial a x_n pudiéndose obtener x_{n+1} . Después se realiza un bucle en el que x_n adoptará el antiguo valor de x_{n+1} hasta que el error, calculado como el valor absoluto de $f(x)$, sea menor que una tolerancia impuesta. Con este método se podría calcular un valor de ω para un valor de k dado. De esta forma, como se conoce que los valores de ω positivos que dan un resultado inestable se encuentran en valores de k entre 0 y 1, se realizará un segundo bucle que contenga al primero. Este segundo bucle lo que hará es variar los valores de k entre 0 y 1. Como el primer bucle resuelve para un valor de k y el segundo realiza incrementos de dicha k se tendrá una dispersión de puntos solución de ω frente a k . Para representarlos se guardan dichos valores en dos matrices y se representan en Matlab. Dicho procedimiento se adjuntará en el anexo.

2.3. Modelo unidimensional (1D)

A continuación se propone realizar el análisis de estabilidad local temporal para un chorro, como se estudia un chorro esbelto se expande en la dirección radial para estudiar solamente una dirección, es decir, estudiar un modelo unidimensional. Esta suposición facilitará los cálculos a la hora de realizar un análisis de estabilidad con los parámetros del problema, ya que la aproximación unidimensional es más sencilla que el cálculo 3D.

Debido a la complejidad de las ecuaciones completas se busca un modelo más sencillo que recoja los ingredientes físicos fundamentales del problema, esto es inercia, difusión viscosa y curvatura completa. Por ello se motiva un modelo 1D obtenido a través de las ecuaciones de Navier-Stokes aplicadas a un chorro esbelto. Aprovechando la esbeltez de la columna líquida se expanden en la coordenada radial, r , las variables del problema. El cumplimiento de esta aproximación está garantizado cuando la escala de evolución en la dirección radial es mucho menor que la axial, es decir que la evolución de la corriente es esbelta. Por lo tanto, la presión, p , y la velocidad axial v_z se expanden en potencias pares de r para garantizar axilsimetría

$$v_z(z, r) = v_0 + v_2 r^2 + \dots$$

También se obtiene para la presión

$$p(z, r) = p_0 + p_2 r^2 + \dots$$

Para que se cumpla la ecuación de continuidad, si se sustituye v_z entonces v_r debe cumplir

$$v_r(z, r) = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_0}{\partial z} r - \frac{1}{4} \frac{\partial v_2}{\partial z} r^3 + \dots$$

Nótese que es una función impar que garantiza el flujo axilsimétrico, ya que en $r = 0$, $v_r = 0$. Sustituyendo estas tres últimas expresiones en las ecuaciones de cantidad de movimiento en dirección axial 2.23, en la de equilibrio en la dirección normal 2.24 y en la ecuación de continuidad 2.21 se obtiene respectivamente

$$\rho \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p_0}{\partial z} + \mu \left(4v_2 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \right) \quad (2.57)$$

$$p_0 + \mu \frac{\partial v_0}{\partial z} = \gamma \nabla \cdot \bar{n} \quad (2.58)$$

$$-\frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial \eta}{\partial z} + 2v_2 \eta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (2.59)$$

Combinando estas ecuaciones para eliminar p_0 y v_2 de la ecuación 2.59 se obtienen dos ecuaciones que formarán el modelo 1D.

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\rho v \frac{\partial v}{\partial z} - \gamma \frac{\partial \nabla \cdot \bar{n}}{\partial z} + \frac{3\mu}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta^2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.60)$$

Para la condición cinemática se obtiene la ecuación 2.61, que se corresponde con la conservación de volumen

$$\frac{\partial \eta^2}{\partial t} + \frac{\partial(\eta^2 v)}{\partial z} = 0 \quad (2.61)$$

La curvatura se incluye completa y cierra el problema

$$\nabla \cdot \bar{n} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\frac{\partial \eta}{\partial z}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \right] + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}} \right] \quad (2.62)$$

2.4. Validez del modelo 1D

En este apartado se estudiará la validez del modelo 1D frente al modelo 3D, para ello se obtendrán las relaciones de dispersión del mismo modo que se hizo con las ecuaciones completas y se representarán ambos modelos comparando su similitud. A continuación se linealizan las ecuaciones 2.60 y 2.61 sustituyendo las siguientes igualdades

$$v = \varepsilon v$$

$$\eta = (a + \varepsilon \eta)$$

Las ecuaciones linealizadas resultan

$$\rho \frac{\partial \varepsilon v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \left(\frac{\varepsilon \eta}{a^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon \eta}{\partial z^2} \right) \right) + 3\mu \frac{\partial^2 \varepsilon v}{\partial z^2} \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon \eta)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon v}{\partial z} a \quad (2.64)$$

Al igual que en los apartados anteriores se descomponen las ecuaciones 2.63 y 2.64 en modos normales resultando:

$$\rho \omega \hat{v} = \gamma \left(\frac{ik \hat{\eta}}{a^2} - ik^3 \hat{\eta} \right) - 3\mu k^2 \hat{v} \quad (2.65)$$

$$\omega \hat{\eta} = -\frac{1}{2} a i k \hat{v} \quad (2.66)$$

El siguiente paso es combinar ambas ecuaciones para que quede una expresión dependiente únicamente de ω (ya que se ha utilizado la expresión 2.27) y k . Para ello se despeja η en ambas ecuaciones y se igualan

$$\frac{\hat{v}(\rho \omega + 3\mu k^2)}{ki \gamma \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right)} = -\frac{1}{2\omega} a i k \hat{v}$$

Desarrollando se obtiene

$$a \gamma k^2 - a^3 \gamma k^4 = a^2 2 \rho \omega^2 + \mu \omega k^2 a^2 \quad (2.67)$$

A continuación se adimensionaliza con los mismos términos que en el apartado 2.2 para poder comparar ambos resultados.

$$\frac{\gamma k^2}{a} - \frac{\gamma k^4}{a} = 2 \rho \frac{\gamma^2}{\mu^2 a^2} \omega^2 + 6 \mu \frac{\gamma}{\mu} \omega \frac{k^2}{a^2}$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{a}{\gamma}$ y utilizando el parámetro adimensional del número de Laplace descrito anteriormente

$$k^2 (1 - k^2) - 2La\omega^2 - 6\omega k^2 = 0 \quad (2.68)$$

Esta ecuación también se debe representar mediante el método de Newton-Raphson explicado en el apartado 2.2, ya que es complicado despejar ω en función de k . Una vez representada se podrá comparar con el resto de modelos para analizar su similitud.

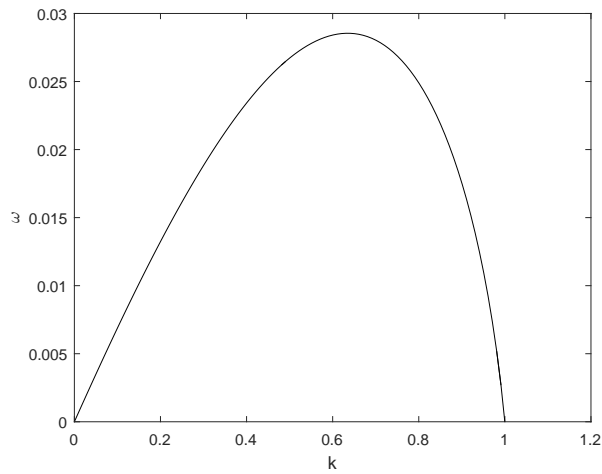
También para este apartado se puede realizar la aproximación de inercia dominante. Para ello se partirá de la ecuación 2.67 y se elimina el término viscoso, resultando

$$a\gamma k^2 - a^3\gamma k^4 = a^2 2\rho\omega^2$$

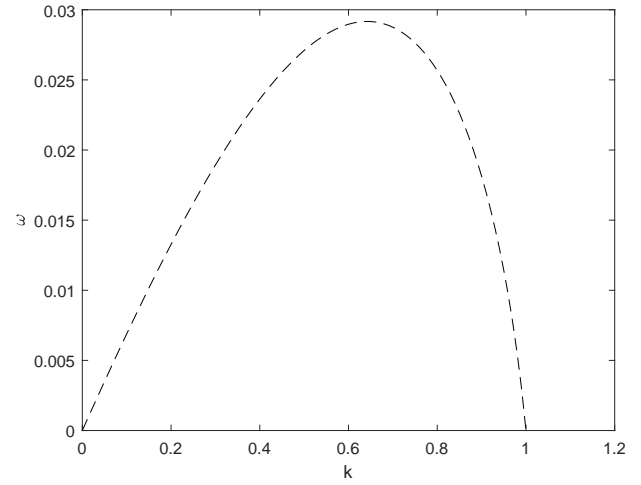
Simplificando y adimensionalizando de la misma manera que en el caso de inercia dominante para las tres dimensiones se obtiene la relación de dispersión

$$\omega = \sqrt{\frac{k^2 - k^4}{2}} \quad (2.69)$$

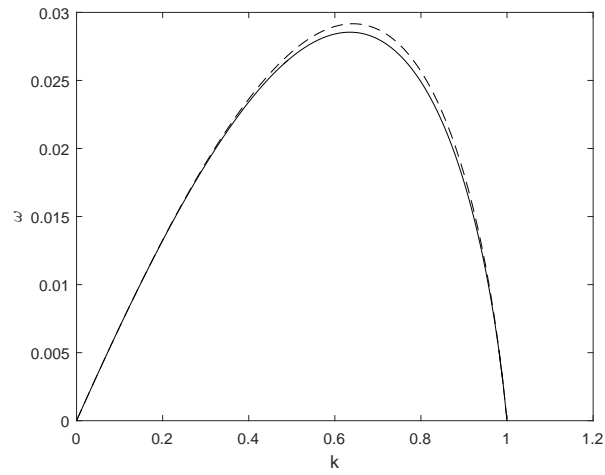
Para comprobar la validez del modelo unidimensional frente al modelo 3D se graficarán las ecuaciones de dispersión $\omega - k$ de ambos modelos y se superpondrán para observar sus similitudes. Para comparar ambos modelos se hará un barrido del número de Laplace en el que se darán tres valores: $La=0.01$ que corresponde al límite de Stokes o de viscosidad dominante; $La=1$ que es un régimen intermedio y $La=100$ límite de Euler o de inercia dominante.



(a)

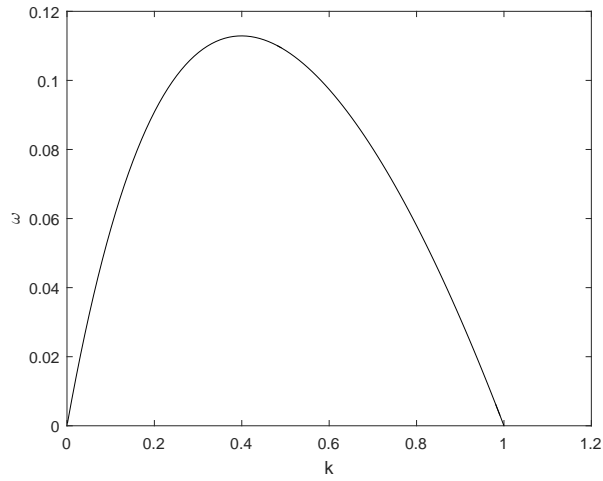


(b)

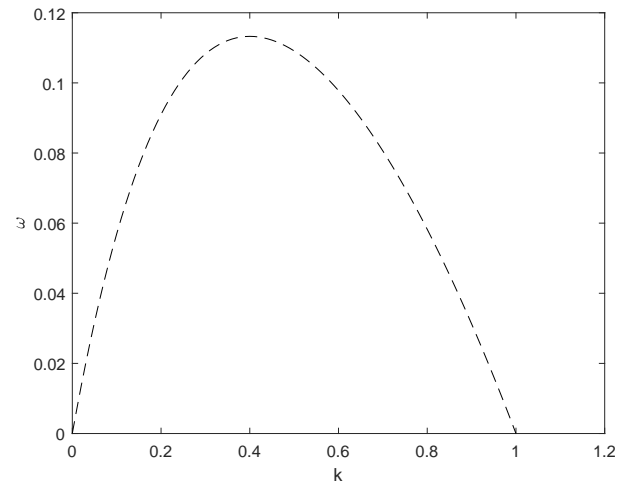


(c)

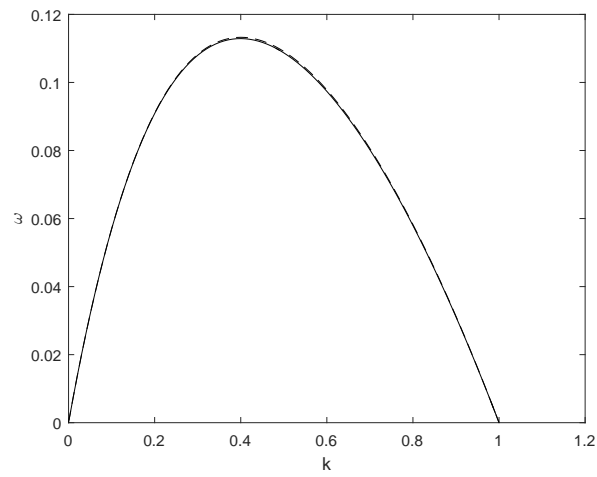
Figura 2.3: La figura representa tres curvas adimensionales escaladas con el tiempo viscocapilar para Laplace igual a 100, que se corresponde con el límite de Euler o de inercia dominante. La figura a muestra la curva del modelo obtenido a través de las ecuaciones completas. La figura b se ha obtenido a partir del modelo 1D. Por último, la figura c representa la superposición de ambos modelos para facilitar la comparación.



(a)

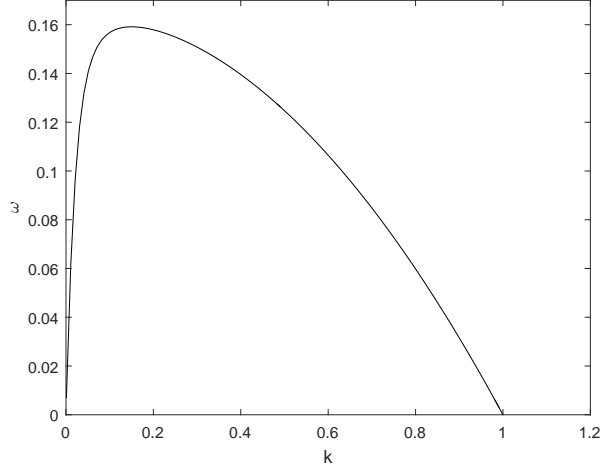


(b)

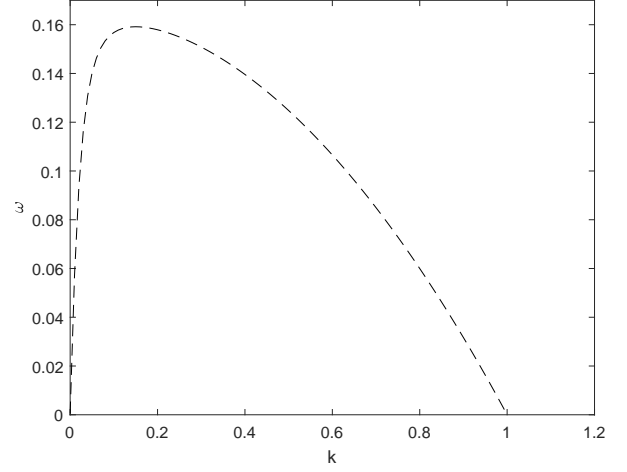


(c)

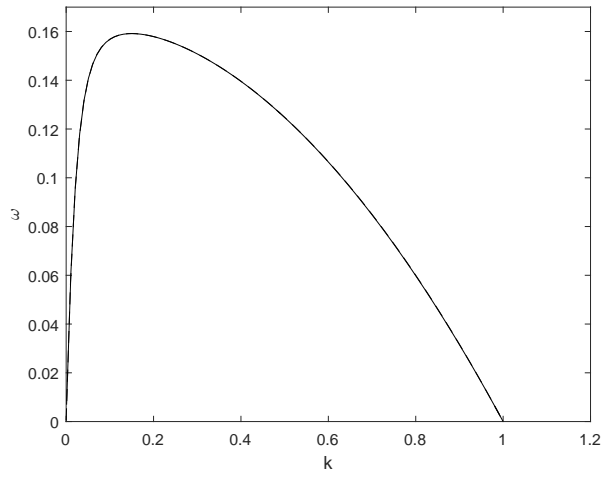
Figura 2.4: La figura representa tres curvas adimensionales escaladas con el tiempo viscocapilar para Laplace igual a 1, o régimen intermedio. La figura a muestra la curva del modelo obtenido a través de las ecuaciones completas. La figura b se ha obtenido a partir del modelo 1D. Por último, la figura c representa la superposición de ambos modelos para facilitar la comparación.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.5: La figura representa tres curvas adimensionales escaladas con el tiempo viscocapilar para Laplace igual a 0.01, que se corresponde con el límite de Stokes o de viscosidad dominante. La figura a muestra la curva del modelo obtenido a través de las ecuaciones completas. La figura b se ha obtenido a partir del modelo 1D. Por último, la figura c representa la superposición de ambos modelos para facilitar la comparación.

En las tres figuras se puede observar que ambos modelos son muy similares, funcionando mejor la aproximación al modelo unidimensional en flujos dominados por viscosidad, es decir, para bajos números de Laplace. Por ejemplo en la figura 2.5 están totalmente solapados ambos modelos. Se puede apreciar que cuanto mayor es la viscosidad menor es el número de onda que produce la tasa de crecimiento óptima.

Otra observación a tener en cuenta es que las tasas de crecimiento positivas se producen para valores de k entre 0 y 1. Tendiendo en cuenta de que estos valores son para k adimensionalizado, el resultado obtenido se puede expresar como

$$0 < \frac{k}{a} < 1$$

Al ser k el número de onda definido por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Se deduce

$$0 < \frac{2\pi a}{\lambda} < 1$$

Por tanto, para longitudes de onda mayores que la longitud de la circunferencia del chorro sin perturbar el problema se vuelve inestable para pequeñas perturbaciones. Esto es un resultado clásico que primero dio Savart y que después planteó Rayleigh en [12].

2.5. Tasa de crecimiento óptima

Otro caso que es interesante estudiar es el valor máximo de la tasa de crecimiento ω así como su avance con el aumento del número de Laplace. También se estudiará el número de onda k para dicho aumento.

Para obtener los máximos de la tasa de crecimiento correspondientes a las curvas mostradas anteriormente se utilizará el comando 'max()' para obtener los valores máximos de las matrices de ω obtenidas de la relación de dispersión del modelo 3D adimensionalizada con el tiempo viscocapilar. Para obtener todos los valores máximos con el avance del número de Laplace se creará un nuevo bucle en el que se obtendrá un número de tasa de crecimiento máximo avanzando el Laplace 0.01 unidades por cada valor para mayor precisión. Una vez obtenida la matriz de ω máximo se representa frente al número de Laplace obteniéndose la figura 2.6

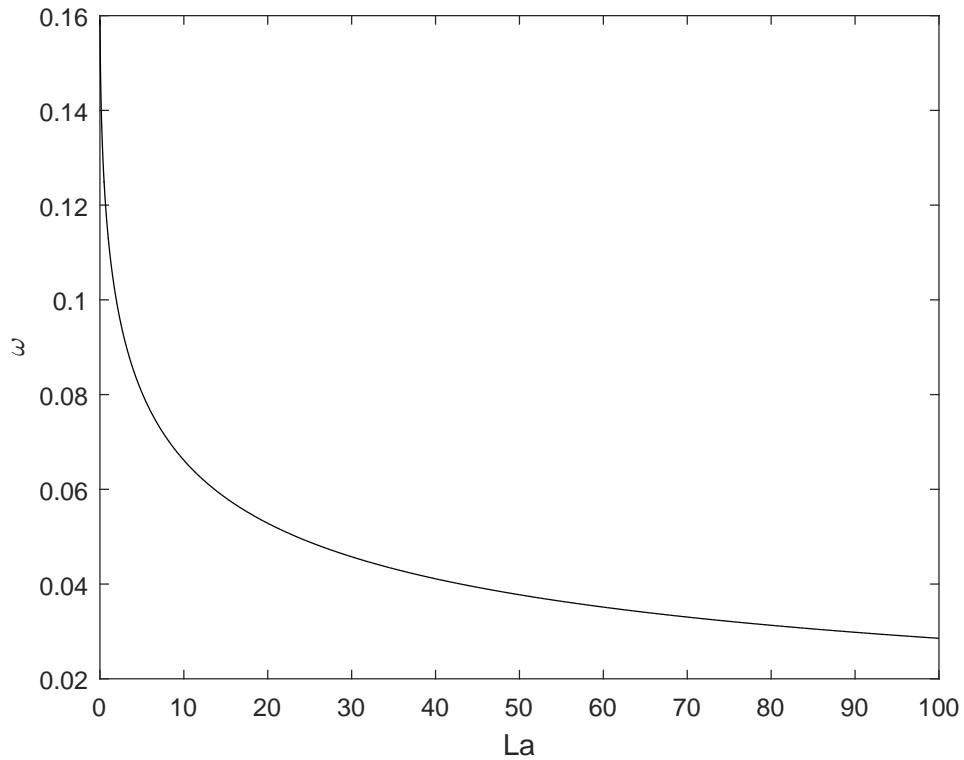


Figura 2.6: La figura muestra la curva de las distintas tasas de crecimiento óptimas (las ω máximas de cada curva de amplificación) obtenidas para cada valor de Laplace de 0 a 100. Dicha curva se ha obtenido con un escalado para la tasa de crecimiento realizado con el tiempo viscocapilar, lo cual hace que tienda a cero para valores altos del número de Laplace

Como se observa en la figura 2.6 la tasa de crecimiento disminuye al aumentar el número de Laplace, tendiendo a cero para Laplace infinito. Esto no tiene sentido, ya que en la práctica el chorro no se vuelve estable para números de Laplace altos. Lo que está ocurriendo es que para valores altos de Laplace la viscosidad del fluido disminuye, ya que se encuentra en el denominador elevada al cuadrado. Esto hace que la adimensionalización viscocapilar pierda sentido para valores altos del Laplace. Por ello, se va a cambiar la adimensionalización y se va a escalar ω con el tiempo capilar de forma que

$$\omega_{capilar} = w_{viscocapilar} \sqrt{La}$$

Si se obtiene $w_{capilar}$ de la misma manera que en el caso anterior pero multiplicando los valores de ω máximos por \sqrt{La} y se representa frente al Laplace se obtiene la figura 2.7. Esta figura sí tiene sentido, ya que la tasa de crecimiento tiene a una asíntota cercana a 0.3 para valores infinitos del número de Laplace.

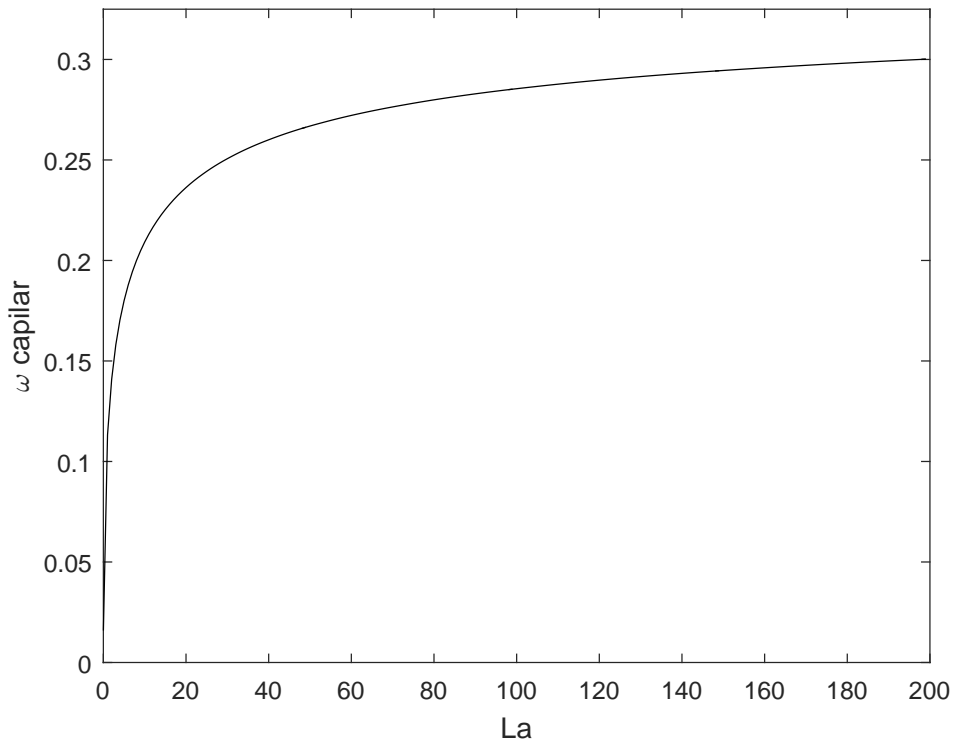


Figura 2.7: Figura similar a 2.6 con una adimensionalización escalando con el tiempo capilar debido a que la viscosidad pierde importancia a números altos de Laplace. Se observa que el límite tiende a 0.3433.

Si se representa el número de onda k correspondiente a las tasas de crecimiento máximas frente al Laplace se obtiene la figura 2.8

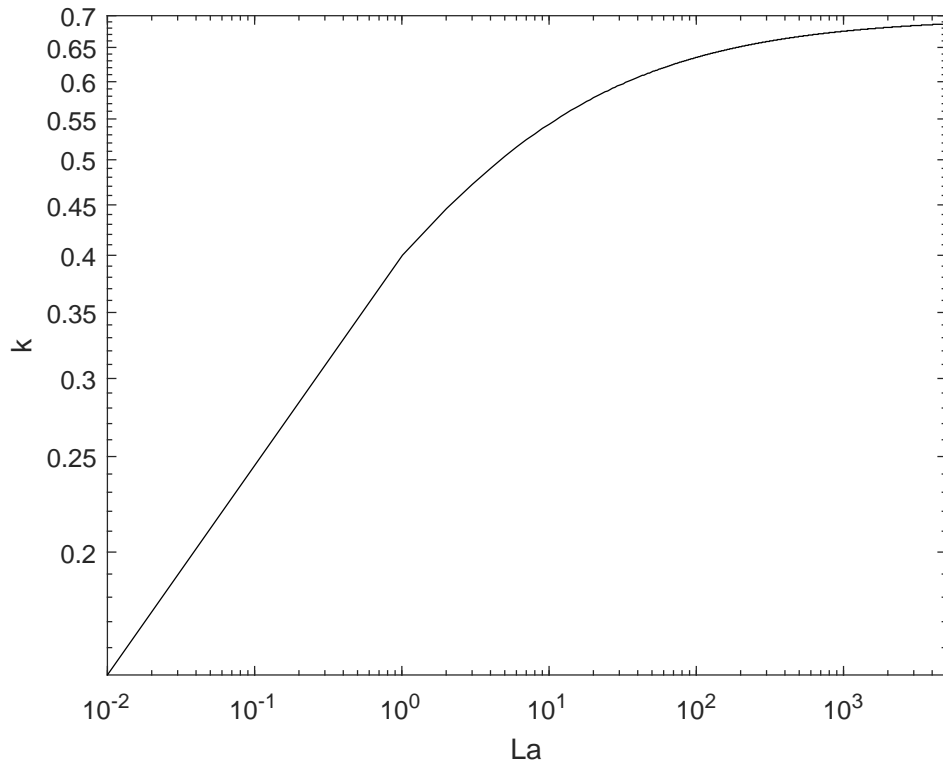


Figura 2.8: Se muestra la representación de los distintos números de onda correspondientes a las tasas de crecimiento máximas para cada número de Laplace. Se ha representado para Laplace de 0 a 4000 y se observa que la curva tiende a 0.7

Para comprobar si los valores a los que tiende la tasa de crecimiento óptima y su número de onda correspondiente para números de Laplace infinitos son correctos se va a representar la relación de dispersión para inercia dominante, ya que si la viscosidad se supone nula el Laplace tiende a infinito. De la figura se obtiene $\omega_{max} = 0,3433$ y $k_{max} = 0,7$, que son los valores clásicos descubiertos por Rayleigh en 1878 en [13] y comentados en la introducción donde se expone que el valor óptimo de la longitud de onda es $\lambda_{opt} = 9,01h_0$. Los valores obtenidos de la expresión adimensional 2.56, que se corresponde con Laplace infinito, coinciden con los límites a los que tienden las curvas 2.7 y 2.8, por lo que las curvas son correctas.

Capítulo 3

Aplicación del modelo 1D: chorros de líquido viscoso estirados por gravedad confinados en la dirección axial.

Dado un chorro con una viscosidad cinemática ν , densidad ρ , tensión superficial γ inyectado a una altura L a través de una boquilla de radio R , con un caudal constante que sale de la boquilla del inyector con un perfil de Poiseuille desarrollado, inyectado a presión atmosférica, sometido a la acción de la gravedad e impactando sobre un baño del mismo líquido, lo cual produce confinamiento axial, tal como se puede observar en la figura 3.2 se busca describir el flujo base a partir de las ecuaciones de un modelo 1D obtenido a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes teniendo en cuenta los efectos gravitatorios en este caso. Se va a suponer que la velocidad del chorro sale desarrollada por la boquilla.

El efecto de la gravedad influye en el estrechamiento del chorro, fenómeno que es muy útil debido a que se pueden crear fibras y gotas con un diámetro muy inferior al diámetro de inyección y con un coste bajo. Se define un caudal crítico Q_{cr} a partir del cual se diferencian varios regímenes: El primero de ellos es un chorro estacionario en el que no se aprecian los efectos de las perturbaciones. Esto se produce para caudales mayores al caudal crítico. Al reducir el caudal a valores inferiores a Q_r pueden comenzar las oscilaciones producidas por las diferentes perturbaciones de velocidad, presión y radio comentadas en apartados anteriores. Estas oscilaciones pueden inducir en el chorro una rotura aguas abajo haciendo que se pase del régimen oscilatorio al régimen de goteo como se puede observar en la figura 3.1, donde las gotas producidas tienen un diámetro mucho menor al diámetro de la boquilla de inyección, lo cual es muy interesante a nivel científico. Por último si el caudal sigue bajando hasta valores muy por debajo del caudal crítico se producirá un goteo en el que las gotas producidas tienen un radio similar al radio de la boquilla, en el que el chorro nunca llegará a formarse

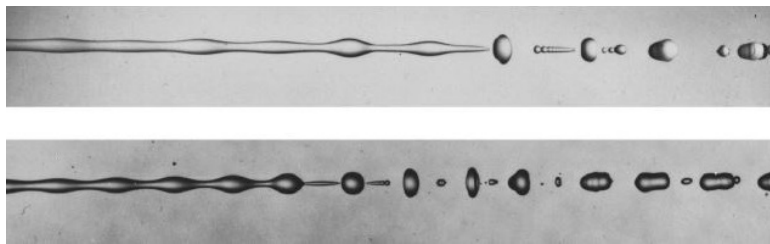


Figura 3.1: Se muestra la ruptura de un chorro inyectado con un caudal inferior al caudal crítico en el que se aprecian las oscilaciones y el goteo. Nótese que estos chorros no están sometidos a confinamiento axial. Imagen obtenida de [16]

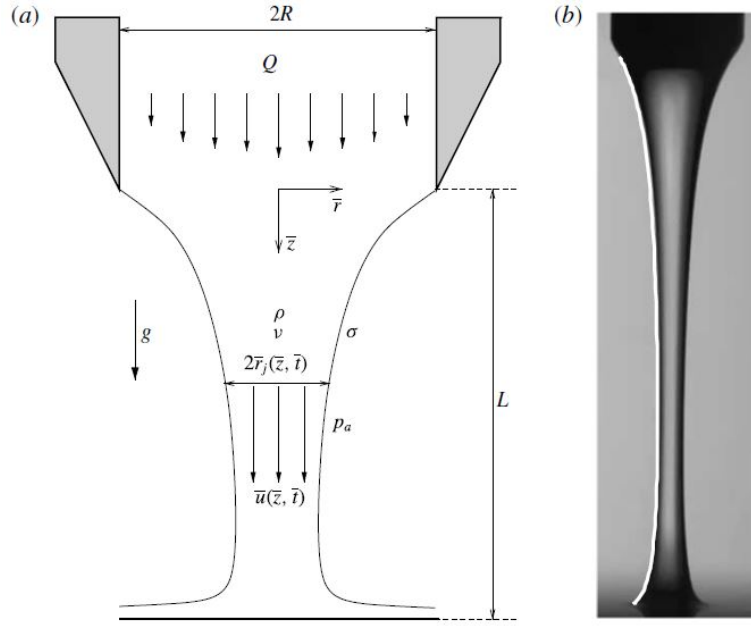


Figura 3.2: La figura (a) representa un esquema teórico de un chorro estacionario con viscosidad cinemática ν , densidad ρ , tensión superficial γ inyectado a una altura L a través de una boquilla de radio R , a presión atmosférica con un caudal constante y sometido a la acción de la gravedad. La figura (b) es una imagen experimental donde se puede observar el estrechamiento del chorro. Ambas han sido obtenidas de [11]

Se va a cambiar la nomenclatura, siendo el radio $r_j(z, t)$ en lugar de $\eta(z, t)$ y la velocidad $u(z, t)$ en lugar de $v(z, t)$. Las ecuaciones a utilizar con la nueva nomenclatura son

$$\frac{\partial r_j^2}{\partial t} + \frac{\partial (ur_j^2)}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 3\nu \frac{\partial}{\partial z} \left(r_j^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.2)$$

$$p = \gamma \left\{ \frac{1}{r_j \left[1 + \left(\frac{\partial r_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{\frac{\partial^2 r_j}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial r_j}{\partial z} \right)^2 \right]} \right\} \quad (3.3)$$

Por conveniencia se van a adimensionalizar estas ecuaciones de la siguiente manera

$$z_{adim} = \frac{z}{l_\gamma}, \quad u_{adim} = \frac{u}{\sqrt{gl_\gamma}}, \quad r_{jadim} = \frac{r_j}{l_\gamma}, \quad t_{adim} = \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{l_\gamma}} \quad (3.4)$$

Donde $l_\gamma = \sqrt{\gamma/(\rho g)}$ es la longitud capilar y L es la altura de inyección. Se nombrarán las variables adimensionales como z , u , r_j y t por sencillez. De este modo, el sistema adimensional resulta

$$\frac{\partial r_j^2}{\partial t} + \frac{\partial (ur_j^2)}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\Gamma}{r_j^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(r_j^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.6)$$

$$C = r_j^{-1} \left[1 + \left(\frac{\partial r_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} - \frac{\partial^2 r_j}{\partial z^2} \left[1 + \left(\frac{\partial r_j}{\partial z} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (3.7)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales depende solamente del número de Kapitza, que se define como $\Gamma = 3\nu[(\rho^3 g)/\gamma^3]^{1/4}$ y es una constante para un líquido dado y una aceleración de la gravedad determinada. La solución dependerá del tamaño del inyector R y el caudal de inyección Q a través de las siguientes condiciones de contorno adimensionales.

$$r_j(z=0, t) = \frac{R}{l_\gamma} = \sqrt{\frac{\rho g R^2}{\gamma}} = Bo^{1/2} \quad (3.8)$$

$$u(z=0, t) = \frac{Q}{\pi R^2 \sqrt{g l_\gamma}} = We^{1/2} Bo^{-1/4} \quad (3.9)$$

Donde We es el número de Weber y Bo el número de Bond. Otra condición de contorno va a ser que la velocidad de impacto con el baño va a tender a cero y por tanto el radio tenderá a infinito formando una asíntota con el baño, esta aproximación no es la mejor posible pero es válida para aproximar la solución. Las condiciones iniciales serán soluciones del sistema de ecuaciones de forma que

$$r_j(z, t=0) = r_{j0}(z) \quad (3.10)$$

$$u(z, t=0) = u_0(z) = q r_{j0}^{-2} \quad (3.11)$$

Siendo $q = Q/(\pi \sqrt{g l_\gamma}^5) = We^{1/2} Bo^{3/4}$ el caudal adimensional. La relación 3.11 se ha obtenido a partir de la ecuación de continuidad 3.5.

De esta forma, el chorro dependerá de cuatro parámetros adimensionales: el número de Bond, $Bo = \rho g R^2 / \gamma$, el número de Weber, $We = \rho Q^2 / (\pi^2 \gamma R^3)$, el número de Kapitza, $\Gamma = 3\nu[\rho^3 g / \gamma^3]^{1/4}$ y la longitud adimensional del chorro L/l_γ , los resultados se darán con la longitud adimensionalizada con el radio del inyector R . El número de Bond compara las fuerzas de inercia con las fuerzas de tensión superficial. El número de Weber compara la presión dinámica con la presión capilar. El número de Kapitza representa la viscosidad cinemática adimensional del fluido.

3.1. Flujo base

Se va a proceder a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales planteado, que se compone de las siguientes ecuaciones

$$r_{j0}^2 u_0 = q; \quad u_0 = \frac{q}{r_{j0}^2} \quad (3.12)$$

$$u_0 u_0' = 1 - C_0' + \Gamma r_{j0}^{-2} (r_{j0}^2 u_0')' \quad (3.13)$$

Siendo las primas derivadas respecto a z , por simplificar. Combinando ambas ecuaciones se obtiene

$$-r_{j0}^2 C_0' + 2q\Gamma [r_{j0}^{-2} (r_{j0}')^2 - r_{j0}^{-1} r_{j0}''] + 2q^2 r_{j0}^{-3} r_{j0}' + r_{j0}^2 = 0 \quad (3.14)$$

$$-r_{j0}^2 C_0' = \frac{r_{j0}'}{[1 + (r_{j0}')^2]^{1/2}} + \frac{r_{j0} r_{j0}' r_{j0}'' + r_{j0}^2 r_{j0}'''}{[1 + (r_{j0}')^2]^{3/2}} - \frac{3r_{j0}^2 r_{j0}' (r_{j0}'')^2}{[1 + (r_{j0}')^2]^{5/2}} \quad (3.15)$$

Al igual que en los apartados anteriores se busca resolver la ecuación resultante para obtener un comportamiento del radio a lo largo del eje z , pero en este caso la expresión es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden por lo que será necesario utilizar el método de Newton-Kantorovich. Este método es similar al Newton-Raphson pero aplicado a ecuaciones diferenciales. Para aplicarlo se linealizan las ecuaciones (3.14) y (3.15) de modo que

$r_{j0}(z) = r_{j0}(z) + \varepsilon r_{j1}(z)$ obteniéndose

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{r'_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{1/2}} - \frac{(r'_{j0})^2 r'_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{3/2}} + \frac{r_{j0} r'_{j0} r''_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{3/2}} + \frac{r_{j0} r''_{j0} r'_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{3/2}} + \\
& \frac{r'_{j0} r''_{j0} r_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{3/2}} + \frac{r_{j0}^2 r'''_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{3/2}} + \frac{2r_{j0} r'''_{j0} r_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{3/2}} + \frac{3r_{j0} (r'_{j0})^2 r''_{j0} r_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{5/2}} + \\
& \frac{3r'_{j0} r_{j0}^2 r''_{j0} r'_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{5/2}} + \frac{3r_{j0}^2 (r''_{j0})^2 r'_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{5/2}} + \frac{6r_{j0}^2 r'_{j0} r''_{j0} r''_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{5/2}} + \frac{6r_{j0} r'_{j0} (r''_{j0})^2 r_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{5/2}} + \\
& \frac{15(r'_{j0})^2 (r''_{j0})^2 r_{j0}^2 r'_{j1}}{[1 + (r'_{j0})^2]^{7/2}} + 2q\Gamma \left[\frac{2r'_{j0} r'_{j1}}{r_{j0}^2} - \frac{2(r'_{j0})^2 r_{j1}}{r_{j0}^3 + \frac{r''_{j0} r_{j1}}{r_{j0}^2}} - \frac{r''_{j1}}{r_{j0}} \right] + \\
& 2q^2 \left[\frac{r'_{j1}}{r_{j0}^3} - \frac{3r'_{j0} r_{j1}}{r_{j0}^4} \right] + 2r_{j0} r_{j1} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial en Matlab® se obtienen las distintas soluciones estacionarias para diferentes configuraciones modificando los parámetros adimensionales comentados recientemente. A continuación se expone una tabla para calcular el Kapitza.

| $\nu(mm^2s^{-1})$ | $\rho(kgm^{-3})$ | $\gamma(mNm^{-1})$ | Γ |
|-------------------|------------------|--------------------|----------|
| 1000 | 970 | 21.1 | 16.67 |
| 10000 | 971 | 21.1 | 166.646 |
| 30000 | 971 | 21.1 | 500 |
| 100000 | 971 | 21.1 | 1666.46 |

En la tabla se exponen distintos valores para aceites de silicona obtenidos de SigmaAldrich. Se han elegido aceites de silicona debido a que abarcan una amplia gama de viscosidades y tanto la densidad como el coeficiente de tensión superficial se mantienen invariables para altos valores de ν . Se han elegido altas viscosidades debido a que en estudios anteriores como [15] se abarcan viscosidades más bajas, por ello se ha partido de la última aportada en este documento que es igual a 1000 cst.

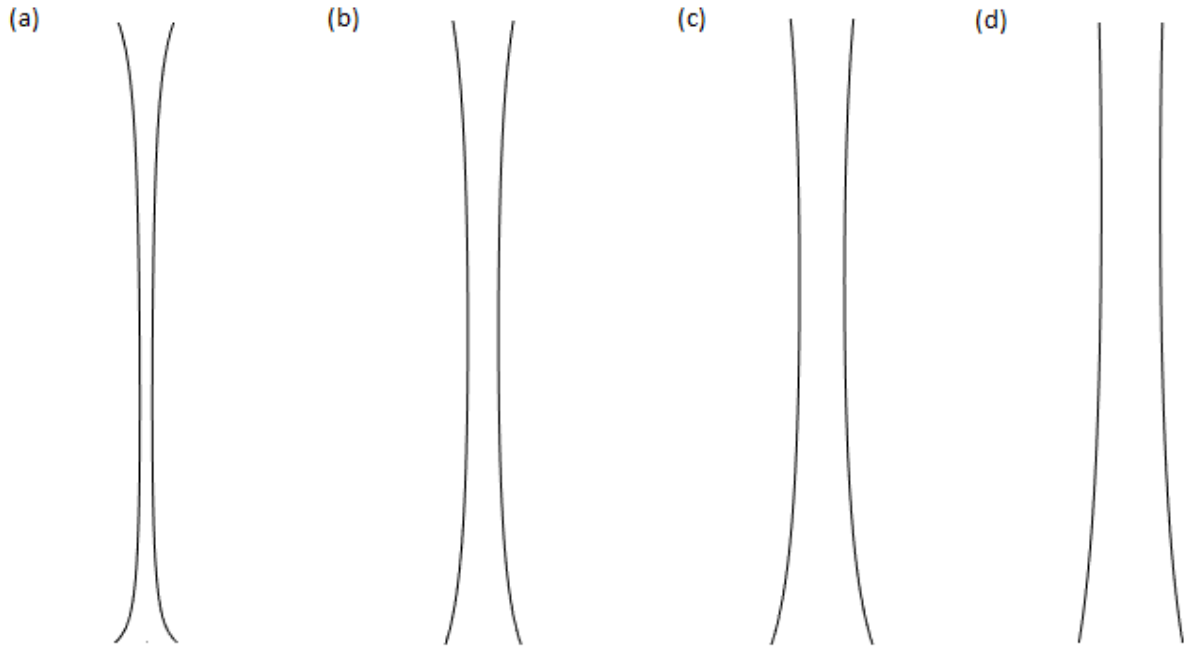


Figura 3.3: Flujos base para $L/R=20$, $Bo=1$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla

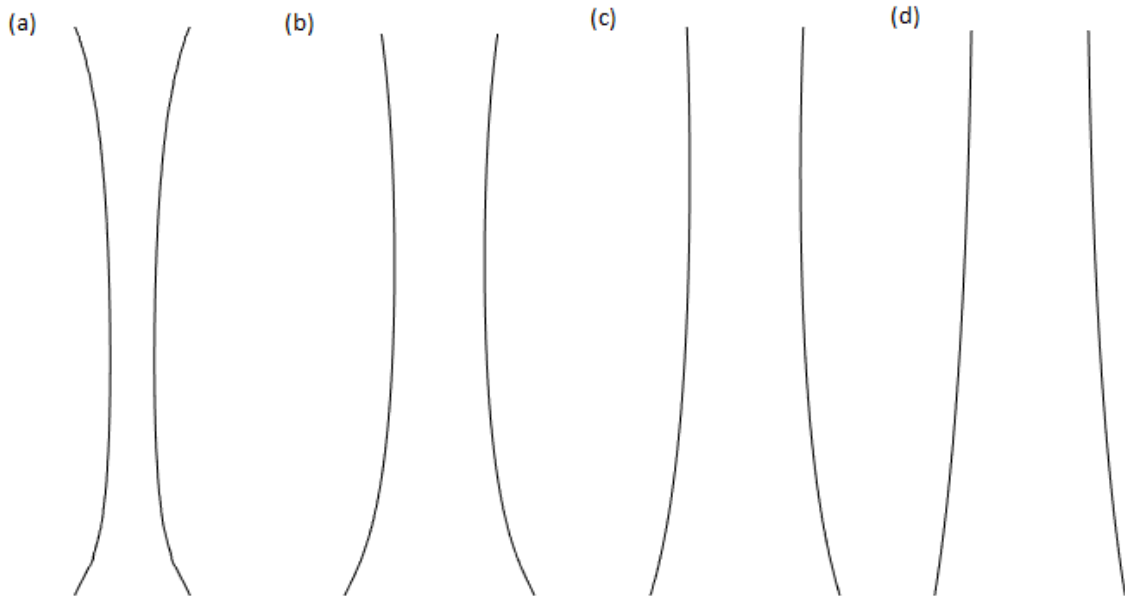


Figura 3.4: Flujos base para una $L/R=10$, $Bo=1$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla

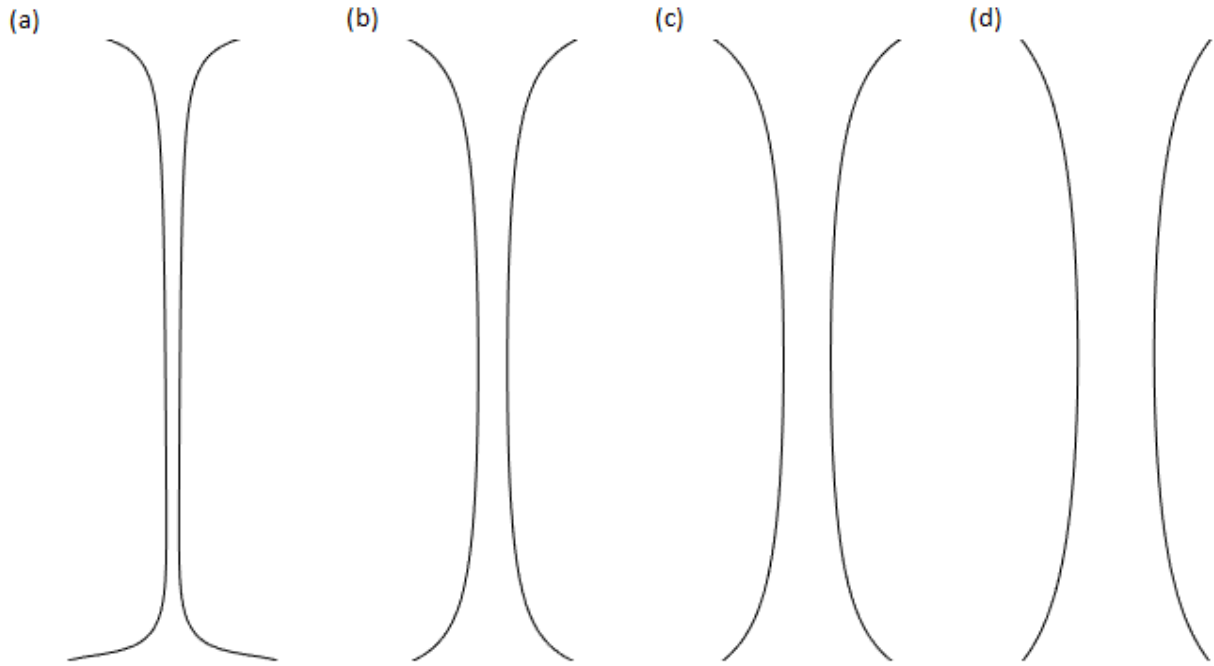


Figura 3.5: Flujos base para $L/R=20$, $Bo=10$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla

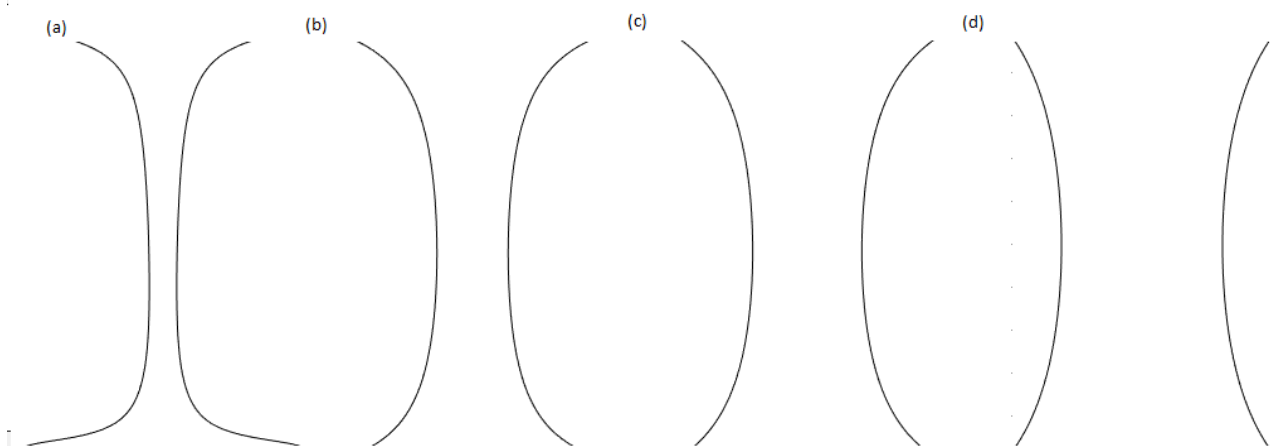


Figura 3.6: Flujos base para $L/R=10$, $Bo=10$, $We=0.003$ y Γ variable de (a)-(d) según los valores de la tabla

Capítulo 4

Conclusiones y trabajo futuro

En el presente trabajo se ha desarrollado el análisis de estabilidad para una columna líquida axilsimétrica en ausencia de gravedad para caudal y viscosidad altos. Se ha comprobado que el desarrollo con las ecuaciones completas es complicado en el régimen lineal y por tanto es necesaria la motivación de un modelo 1D que recoja la física del problema. Tras desarrollar el modelo 1D se han representado las curvas de amplificación de ambos modelos y se han comparado haciendo un barrido de viscosidades, y, por tanto del número de Laplace resultando un parecido satisfactorio que demuestra que el modelo 1D es perfectamente válido para describir la estabilidad de una columna líquida pero aún más para casos en los que el fluido se encuentra dominado por viscosidad. También se ha estudiado la longitud de onda crítica a partir de la cual el problema comienza a ser inestable y que fue propuesta por Plateau comprobando que cuando se produce una perturbación de longitud de onda mayor a la longitud de la circunferencia del chorro sin perturbar este se volverá inestable. Otro estudio ha sido la longitud de onda óptima por la cual el chorro se desintegrará más rápidamente y que fue propuesta por Rayleigh, llegando al mismo valor de longitud de onda que él propuso y que se expone en la introducción; también, derivado de este análisis, se ha obtenido la tasa de crecimiento correspondiente máxima y se ha representado frente al Laplace con distintas adimensionalizaciones. De este modo se ha demostrado que la adimensionalización viscocapilar pierde sentido para números de Laplace altos, ya que la viscosidad disminuye y pierde importancia en el problema. Por último se ha aplicado el modelo 1D a un chorro de alta viscosidad bajo la acción de la gravedad para obtener distintos flujos base. Para ello se ha utilizado una nueva adimensionalización que hace que la solución dependa de cuatro variables adimensionales. Se han representado los flujos base y se observa que para mayores viscosidades el chorro se estrecha menos en su caída, llegando a ser prácticamente una columna de líquido en algunos de estos resultados.

En cuanto al trabajo futuro se siguen estudiando multitud de aplicaciones y mejoras en la obtención de gotas y fibras, entre ellas la reología superficial añadiendo surfactantes que crean una capa evitando que las gotas se unan entre ellas modificando su dinámica en la interfase, esta aplicación puede tener un gran impacto para el uso en la industria alimentaria, farmacia, medicina (como surfactante pulmonar), etc. Para estas aplicaciones se sigue utilizando el modelo 1D expuesto en este trabajo. En cuanto al análisis de estabilidad global con la configuración del capítulo 3 aún se sigue investigando la simulación numérica directa de las ecuaciones unidimensionales aplicadas a chorros con viscosidades muy altas en trabajos cercanos temporalmente como [15] y [11]

Anexo

Código para la obtención de las curvas de amplificación por el método de Newton-Raphson a partir del modelo de ecuaciones completas

```
clc
clear all
syms w k Re Fk Fkp
Fk=(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
Fkp=(sqrt(k^2+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2+Re*w)))
f=(Re*w^2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-k^2*(1-k^2)
+4*k^4*((k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-(sqrt(k^2
+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2+Re*w))))/Re
+2*w*k^2*(2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-1))
df=(2*k^2*((2*k*besseli(0,k))/besseli(1,k))-1)
- (4*k^4*(Re/2+(besseli(0,(k^2+Re*w)^(1/2)))*((Re*besseli(1,(k^2
+Re*w)^(1/2)))/(2*(k^2+Re*w))- (Re*besseli(0,(k^2
+Re*w)^(1/2)))/(2*(Re*w+k^2)^(1/2)))*(k^2
+Re*w)^(1/2))/besseli(1,(Re*w+k^2)^(1/2))^2
+ (Re*besseli(0,(k^2+Re*w)^(1/2)))/(2*besseli(1,(k^2
+Re*w)^(1/2)))*(Re*w+k^2)^(1/2)))/Re
+ (2*Re*k*w*besseli(0,k))/besseli(1,k))
Re=100
k=-0.009;
w=1;
n=0;
m=0
error=50;
tol=1e-8;
while k<1

k=k+0.01
n=n+1;
error=50
while error>tol
w=w-((Re*w^2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
-k^2*(1-k^2)+4*k^4*((k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
-(sqrt(k^2+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2
+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2+Re*w))))/Re
+2*w*k^2*(2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
-1)))/((2*k^2*((2*k*besseli(0,k))/besseli(1,k))-1)
- (4*k^4*(Re/2+(besseli(0,(k^2
+Re*w)^(1/2)))*((Re*besseli(1,(k^2
+Re*w)^(1/2)))/(2*(k^2+Re*w))- (Re*besseli(0,(k^2
```

```

+ Re*w)^(1/2)))/(2*(Re*w + k^2)^(1/2)))*(k^2
+ Re*w)^(1/2))/besseli(1, (Re*w + k^2)^(1/2))^2
+ (Re*besseli(0, (k^2 + Re*w)^(1/2)))/(2*besseli(1, (k^2
+ Re*w)^(1/2))*(Re*w + k^2)^(1/2)))/Re
+ (2*Re*k*w*besseli(0, k))/besseli(1, k)))
error=abs((Re*w^2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
-k^2*(1-k^2)+4*k^4*((k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
-(sqrt(k^2+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2
+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2+Re*w))))/Re
+2*w*k^2*(2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-1)))

if error<tol
    matrizk(n)=k;
    matrizw(n)=w;

end

end

```

end

```

plot(matrizk,matrizw,'k')
ylabel(' \omega ')
xlabel('k')
hold on

```

Código para la obtención de las tasas de crecimiento máximas y los números de onda asociados

```

clc
clear all
syms w k Re Fk Fkp
Fk=(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
Fkp=(sqrt(k^2+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2+Re*w)))
f=(Re*w^2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-k^2*(1-k^2)+
4*k^4*((k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-(sqrt(k^2
+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2+Re*w))))/Re
+2*w*k^2*(2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-1))
df=(2*k^2*((2*k*besseli(0, k))/besseli(1, k) - 1)
- (4*k^4*(Re/2 + (besseli(0, (k^2 + Re*w)^(1/2)))*((Re*besseli(1, (k^2
+ Re*w)^(1/2)))/(2*(k^2 + Re*w)) - (Re*besseli(0, (k^2
+ Re*w)^(1/2)))/(2*(Re*w + k^2)^(1/2)))*(k^2
+ Re*w)^(1/2))/besseli(1, (Re*w + k^2)^(1/2))^2 + (Re*besseli(0, (k^2
+ Re*w)^(1/2)))/(2*besseli(1, (k^2 + Re*w)^(1/2)))*(Re*w
+ k^2)^(1/2)))/Re + (2*Re*k*w*besseli(0, k))/besseli(1, k))
Re=0.01
k=-0.009;
w=1;
n=0;
m=0
error=50;

```

```

tol=1e-8;
while Re<100
    m=m+1
    while k<1

        k=k+0.01
        n=n+1;
        error=50
        while error>tol
            w=w-((Re*w^2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-k^2*(1-k^2)
                +4*k^4*((k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-(sqrt(k^2
                +Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2
                +Re*w))))/Re+2*w*k^2*(2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
                -1)))/((2*k^2*((2*k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-1)
                - (4*k^4*(Re/2 + (besseli(0, (k^2
                + Re*w)^(1/2)))*((Re*besseli(1, (k^2 + Re*w)^(1/2)))/(2*(k^2
                + Re*w)) - (Re*besseli(0, (k^2 + Re*w)^(1/2)))/(2*(Re*w
                + k^2)^(1/2)))*(k^2 + Re*w)^(1/2))/besseli(1, (Re*w
                + k^2)^(1/2))^2 + (Re*besseli(0, (k^2
                + Re*w)^(1/2)))/(2*besseli(1, (k^2 + Re*w)^(1/2)))*(Re*w
                + k^2)^(1/2)))/Re + (2*Re*k*w*besseli(0, k))/besseli(1, k)))
            error=abs((Re*w^2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-k^2*(1-k^2)
                +4*k^4*((k*besseli(0,k)/besseli(1,k))
                -(sqrt(k^2+Re*w)*besseli(0,sqrt(k^2+Re*w))/besseli(1,sqrt(k^2
                +Re*w))))/Re+2*w*k^2*(2*(k*besseli(0,k)/besseli(1,k))-1)))

            if error<tol
                matrizk(n)=k;
                matrizw(n)=w;

            end

        end

    end

end

matrizwmax(m)=max(matrizw)*sqrt(Re)
[n]=find(matrizw==max(matrizw))
matrizkmax(m)=matrizk(n)
matrizRe(m)=Re;
Re=Re+1

k=-0.009;
w=1;
n=0;
error=50;
tol=1e-8;
end

```

```
plot (matrizRe ,matrizwmax , 'k ' )  
ylabel ( '\omega ' )  
xlabel ( 'La ' )  
hold on
```

Bibliografía

- [1] N. Ashgriz and F. Mashayek, “Temporal analysis of capillary jet breakup,” *J. Fluid Mech.*, vol. 291, pp. 163–190, 1995.
- [2] O. A. Basaran, “Small-scale free surface flows with breakup: Drop formation and emerging applications,” *AIChE Journal*, vol. 48, no. 9, pp. 1842–1848, 2002.
- [3] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydrodynamic stability*. OUP, 1961.
- [4] R. Donnelly and W. Glaberson, “Experiments on the capillary instability of a liquid jet,” *Proc. Roy. Soc.*, vol. A290, pp. 547–566, 1966.
- [5] J. Eggers and T. F. Dupont, “Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier–stokes equation,” *Journal of fluid mechanics*, vol. 262, pp. 205–221, 1994.
- [6] F. García and A. Castellanos, “One-dimensional models for slender axisymmetric viscous liquid jets,” vol. 6, no. 8, pp. 2676–2689, 1994.
- [7] H. González and F. García, “The measurement of growth rates in capillary jets,” vol. 619, pp. 179–212, 2009.
- [8] L. G. Leal, *Advanced transport phenomena: fluid mechanics and convective transport processes*. Cambridge University Press, 2007, vol. 7.
- [9] H. Lee, “Drop formation in a liquid jet,” *IBM Journal of Research and Development*, vol. 18, no. 4, pp. 364–369, 1974.
- [10] N. N. Mansour and T. S. Lundgren, “Satellite formation in capillary jet breakup,” *Phys. Fluids A: Fluid Dyn.*, vol. 2, no. 7, pp. 1141–1144, 1990.
- [11] A. Martínez-Calvo, M. Rubio-Rubio, and A. Sevilla, “The nonlinear states of viscous capillary jets confined in the axial direction,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 834, pp. 335–358, 2018.
- [12] L. Rayleigh, “On the capillary phenomena of jets,” *Proc. R. Soc. London*, vol. 29, no. 196-199, pp. 71–97, 1879.
- [13] W. Rayleigh, “On the instability of jets,” *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 10, pp. 4–13, 1878.
- [14] ———, “On the instability of a cylinder of viscous liquid under capillary force,” *Phil. Mag. and J. Science*, 1892.
- [15] M. Rubio-Rubio, A. Sevilla, and J. Gordillo, “On the thinnest steady threads obtained by gravitational stretching of capillary jets,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 729, pp. 471–483, 2013.

- [16] D. Rutland and G. Jameson, “A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 46, no. 2, pp. 267–271, 1971.
- [17] F. Savart, “Mémoire sur la constitution des veines liquides lancées par des orifices circulaires en mince paroi,” *Ann. Chim.*, vol. 53, pp. 337–386, 1833.